BCPST1 **Sujet 1**
Semaine de colle: 18

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

## Question de cours

Développement limité en 0 d'ordre 3 de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ et de exp. Exposer la méthode pour obtenir les DL en $a$ et en l'infini.

## Exercice 1

Soit $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)$. Montrer que l'on peut prolonger $f$ en une fonction dérivable en 0 et préciser la position de la tangente en 0 vis-à-vis de sa tangente.

## Exercice 2

1. Montrer que, pour tout réel positif $x$, on a : $\exp(x) \geqslant 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.
2. Montrer que, pour tout réel $x$, on a : $\exp(x) \geqslant 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}$.

BCPST1 **Sujet 2**
Semaine de colle: 18

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

## Colles de mathématiques de M Bacquelin

### Question de cours

Définition et propriétés diverses de la fonction exp.

### Exercice 1

Calculer $\lim_{x \longrightarrow 0} \left( \frac{\sin(x - \sin(x))}{\sqrt{1 + x^3} - 1} \right)$ et $\lim_{x \longrightarrow 0} \left( \frac{1}{\ln(1 + x)} - \frac{1}{x} \right)$.

### Exercice 2

Mener une étude complète et représenter graphiquement la fonction suivante :

$$g : x \mapsto x \exp\left( \frac{x - 1}{x + 1} \right)$$

BCPST1 **Sujet 3** Sujet disponible sur:
Semaine de colle: 18 cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

## Question de cours

Définition et propriétés diverses de la fonction ln.

## Exercice 1

Expliciter $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ avec $x$ un réel non nul.

## Exercice 2

Pour $x$ réel, on pose $f(x) = \ln(1 + e^{2x} - e^x)$.

1. Montrer que $f$ est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Établir : $f(x) = x + x^2 + \underset{0}{o}(x^3)$.
3. En déduire l'équation de la tangente à la courbe de $f$ au point d'abscisse 0. Étudier la position de la courbe de $f$ par rapport à sa tangente au voisinage de ce point.
4. Montrer que la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe de $f$ en $+\infty$ et étudier la position de la courbe de $f$ par rapport à cette asymptote pour les abscisses positives. *Indications sur la démarche* : Montrer que $\lim_{x\to 0}(f(x) - 2x) = 0$ et étudier le signe de $f(x) - 2x$ pour tout réel $x$ positif.
5. (a) Justifier que $f$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$, que $f' > 0$ sur $]-\ln(2), +\infty[$ et que $f$ réalise une bijection de $]-\ln(2), +\infty[$ sur un intervalle ouvert $J$ que l'on précisera (on remarquera en particulier que $0 \in J$). On admet dans ce cas que la bijection réciproque $f^{-1} : J \longrightarrow ]-\ln(2), +\infty[$ est encore de classe $C^\infty$. En particulier, $f^{-1}$ est de classe $C^3$ sur $J$ donc $f^{-1}$ admet un dé veloppement limité en 0 d'ordre 3 (conséquence du théorème de Taylor-Young) : $f^{-1}(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \underset{0}{o}(x^3)$ où $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

   (b) Pour $x \in \mathbb{R}_+$, calculer très simplement $f^{-1}(f(x))$. En déduire le développement limité d'ordre 3 en 0 de $f^{-1}(f(x))$.

   (c) Sachant que $f^{-1}(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \underset{0}{o}(x^3)$, donner une autre expression du développement limité de $f^{-1}(f(x))$ en fonction de $a, b, c$ et $d$.

   (d) Conclure que $f^{-1}(x) = x - x^2 + 2x^3 + \underset{0}{o}(x^3)$.