a) Soit $a \in E$. On peut écrire

$$f(a+h) = \frac{1}{2}\big((u(a) \mid a)+(u(a) \mid h)+(u(h) \mid a)+(u(h) \mid h)\big)+(x_0 \mid a)+(x_0 \mid h)$$

Sachant $(u(h) \mid a) = (u(a) \mid h)$, on obtient

$$f(a+h) = f(a) + \ell(h) + (u(h) \mid h)$$

avec ℓ la forme linéaire donnée par

$$\ell(h) = (u(a) + x_0 \mid h)$$

Puisque

$$|(u(h) \mid h)| \leq \|u(h)\| \, \|h\| \text{ avec } \|u(h)\| \xrightarrow[h \to 0_E]{} 0$$

on obtient le développement limité à l'ordre 1

$$f(a+h) = f(a) + \ell(h) + \mathrm{o}(h)$$

Finalement f est différentiable en a et

$$\mathrm{d}f(a).h = (u(a) + x_0 \mid h)$$

b) Le gradient de f en a est alors

$$\operatorname{grad} f(a) = u(a) + x_0$$

a) Soit $h = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

$$\frac{1}{t}(f(t.h) - f(0,0)) = \frac{1}{t}(f(t\alpha, t\beta)) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha = 0 \\ \beta^2/\alpha & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc

$$D_h f(0,0) = \begin{cases} \beta^2/\alpha & \text{si } \alpha \neq 0 \\ 0 & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$$

b)

$$f(1/n, 1/\sqrt{n}) = 1 \to 1 \neq f(0,0)$$

donc f n'est pas continue en $(0,0)$.

a) Quand $(x,y) \to (0,0)$, on peut écrire $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ avec $r = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$.
On a alors

$$f(x,y) = 2r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\ln r \to 0$$

car $r^2 \ln r \to 0$
On prolonge f par continuité en $(0,0)$ en posant $f(0,0) = 0$.

b) f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ par opérations. On observe $f(x,y) = -f(y,x)$ donc en dérivant cette relation en la variable x on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial y}(y,x)$$

c) On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(f(t,0) - f(0,0)\right) = 0$$

et de même $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
Pour $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\ln(x^2+y^2) + \frac{2x(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$$

Quand $(x,y) \to (0,0)$, on peut écrire $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ avec $r = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4r\ln r + 2r(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \to 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

a) Notons $A(x) = (a_{i,j}(x)) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice dont $D_n(x)$ est le déterminant La fonction $x \mapsto A(x)$ est dérivable car ses fonctions coordonnées le sont et par multilinéarité du déterminant, la fonction D_n est dérivable avec

$$D_n' = \det(C_1', C_2, \dots, C_n) + \det(C_1, C_2', \dots, C_n) + \cdots + \det(C_1, C_2, \dots, C_n')$$

et donc

$$D_n' = \det(C_1, C_2, \dots, C_n')$$

En développant par rapport à la dernière colonne ce dernier déterminant, on obtient :

$$D_n'(x) = D_{n-1}(x)$$

b) Sachant $D_n(0) = 0$ et $D_1(x) = x$ on peut conclure, par récurrence,

$$D_n(x) = \frac{x^n}{n!}$$

Exercice 8 : [énoncé]

L'application φ est clairement de classe $\mathcal{C}^1$.
Etudions sa bijectivité. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\varphi(x,y) = (a,b) \Leftrightarrow \begin{cases} y + f(x) = a \\ x + f(y) = b \end{cases}$$

ce qui nous ramène au système

$$\begin{cases} y + f(b - f(y)) = a \\ x = b - f(y) \end{cases}$$

Considérons l'application

$$\varphi_b : y \mapsto y + f(b - f(y))$$

φ_b est continue dérivable et

$$\varphi_b'(y) = 1 - f'(y)f'(b - f(y))$$

donc $\varphi_b'(y) > 0$ car

$$|f'(y)f'(b - f(y))| \leqslant k^2 < 1$$

Par conséquent, l'application φ_b est strictement croissante.
De plus, f étant k lipschitzienne

$$|f(t) - f(0)| \leqslant k\,|t|$$

donc

$$|f(t)| \leqslant k\,|t| + |f(0)|$$

puis

$$|f(b - f(y))| \leqslant k\,|b - f(y)| + |f(0)| \leqslant k^2\,|y| + \ell$$

par suite

$$\varphi_b(y) \geqslant (1 - k^2)y - \ell \xrightarrow[y \to +\infty]{} +\infty$$

et

$$\varphi_b(y) \leqslant (1 - k^2)y + \ell \xrightarrow[y \to -\infty]{} -\infty$$

L'application φ_b réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et alors

$$\varphi(x,y) = (a,b) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \varphi_b^{-1}(a) \\ x = b - \varphi_b^{-1}(a) \end{cases}$$

Finalement, l'application φ est bijective de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$.
Rappelons que l'application φ est classe $\mathcal{C}^1$. De plus

$$\mathrm{Jac}\varphi_{(x,y)} = \begin{pmatrix} f'(x) & 1 \\ 1 & f'(y) \end{pmatrix}$$

et donc le jacobine de φ ne s'annule pas en vertu du calcul suivant

$$\det(\mathrm{Jac}\varphi_{(x,y)}) = f'(x)f'(y) - 1 \neq 0$$

et car $|f'(x)f'(y)| \leqslant k^2 < 1$.
Par le théorème d'inversion globale, on peut alors affirmer que φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

Points critiques $(0,1)$ et $(0,\mathrm{e}^{-2})$.
En $(0,1)$:

$$f(0,1)=0 \text{ et } \forall x\in\mathbb{R}, \forall y>0, f(x,y)\geqslant 0$$

C'est un minimum global.
En $(0,\mathrm{e}^{-2})$:

$$rt-s^2=-4<0$$

Ce n'est pas un extremum local.

Points critiques $(0,1)$ et $(0,\mathrm{e}^{-2})$.
En $(0,1)$:

$$f(0,1)=0 \text{ et } \forall x\in\mathbb{R},\forall y>0, f(x,y)\geqslant 0$$

C'est un minimum global.
En $(0,\mathrm{e}^{-2})$:

$$rt-s^2=-4<0$$

Ce n'est pas un extremum local.

b) L'annulation des dérivées partielles conduit à Vect $(3,-5,1)$ droite de points critiques.
Pour $x \in \mathbb{R}$, étudions le point critique $(3x,-5x,x)$. Pour $t \neq 0$, on a

$$f((3x,-5x+x)+(t,0,0)) = 2t^2 > 0 \text{ et } f((3x,-5x,-x)+(0,0,t)) = -2t^2 < 0$$

et donc $(3x,-5x,x)$ n'est pas extremum local.
c) La fonction f est une forme quadratique, en introduisant la matrice représentative

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3/2 & 3/2 \\ 3/2 & 1 & 1/2 \\ 3/2 & 1/2 & -2 \end{pmatrix}$$

on peut écrire

$$f(x,y,z) = {}^tXMX \text{ avec } X = {}^t\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$$

La matrice M est symétrique réelle. Pour calculer son polynôme caractéristique, je n'ai pas trouvé plus simple que d'appliquer Sarrus... On obtient les valeurs propres $-5/2, 0$ et $7/2$.
En exploitant une base orthonormée de diagonalisation, on obtient

$$-\frac{5}{2}{}^tXX \leqslant f(x) = {}^tXMX \leqslant \frac{7}{2}{}^tXX$$

Les valeurs extrêmes de la fonction f dans la boule unité fermée sont donc $-5/2$ et $7/2$ et celles-ci sont prises sur les vecteurs propres unitaires associés.