BCPST1 **Sujet 1** Semaine de colle: 19

Sujet disponible sur: cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Définition de la transposée d'une matrice. Donner les règles de calcul notables

Exercice 1

1. Montrer que, pour tout réel positif x, on a : $\exp(x) \geqslant 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.
2. Montrer que, pour tout réel x, on a : $\exp(x) \geqslant 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}$.

Exercice 2

Démontrer ces égalités :

$$2 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) = \arctan\left(\frac{5}{12}\right) \quad \text{et} \quad 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) = \arctan\left(\frac{120}{119}\right)$$

et en déduire que $\dfrac{\pi}{4}$ est $4 \arctan\left(\dfrac{1}{5}\right) - \arctan\left(\dfrac{1}{239}\right)$

BCPST1 **Sujet 2**
Semaine de colle: 19

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Définition de la somme et du produit de deux matrices.

Exercice 1

Résoudre l'équation suivante d'inconnue x réel : $\exp(x)+\exp(1-x) = e+1$ puis (aucun rapport!) expliciter $\arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ avec x un réel non nul.

Exercice 2

On considère l'équation

$$(E): \quad x^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Vérifier que $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{16}$ sont solutions de (E).
2. En considérant les variations de la fonction $f : x \mapsto x^{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, montrer que (E) admet exactement deux solutions, puis conclure.

BCPST1 **Sujet 3** — Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 19 — cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Matrices inversibles : définition, notations et caractérisation, propriétés de base. Recherche pratique de l'inverse et règles de calcul.

Exercice 1

1. Prouver que pour tout x de $[-1, 1]$, on a :
$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}.$$
2. Montrer que, pour tout réel x de $]0, 1[$, on a :
$$x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \frac{1}{2}.$$
3. Étudier la fonction $f : x \mapsto x - \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$

Exercice 2

On pose $f : x \mapsto \ln(|2x+1|) + \ln(|x+3|)$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Résoudre alors l'inéquation suivante $\ln(|2x+1|) + \ln(|x+3|) < \ln(3)$ d'inconnue $x \in \mathcal{D}_f$.