BL2 **Sujet 1** Semaine de colle: 23

Autres sujets posés sur: cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Expression du projeté orthogonal dans une base orthonormée du sous-espace, propriétés géométriques d'une projection orthogonale. Schémas compris.

Exercice

Évaluer les dérivées partielles, si elles existent, de la fonction suivante :

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \exp\left(\dfrac{-1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } x = y = 0 \end{cases}$$

Exercice

Soit l'application linéaire u de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice canoniquement associée est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Expliciter u, $\mathrm{Im}\,(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}\,(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont supplémentaires.
3. Expliciter $\mathrm{Im}\,(u)^{\perp}$ et $\mathrm{Ker}(u)^{\perp}$. Qui reconnaissez-vous ?
4. Déterminer la projection p sur $\mathrm{Ker}(u)$ parallèlement à $\mathrm{Im}\,(u)$ puis la projection q orthogonale sur $\mathrm{Im}\,(u)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(u)$.

BL2 **Sujet 2** — Autres sujets posés sur:

Semaine de colle: 23 — cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Décomposition d'un vecteur dans une base orthonormée. Produit scalaire et norme en base orthonormée.

Exercice

Soit $g : (x, y) \mapsto x^2 + 2x + y^2 + 3y$.

1. Chercher les points critiques de g.
2. Déterminer les courbes de niveau de g.
3. En déduire si g présente un extremum.
4. Démontrer de nouveau ce résultat grâce aux théorèmes de votre cours.

Exercice

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est M avec

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Expliciter f, $\mathrm{Im}\,(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}\,(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont supplémentaires.
3. Expliciter $\mathrm{Im}\,(f)^{\perp}$ et $\mathrm{Ker}(f)^{\perp}$. Qui reconnaissez-vous ?
4. Montrer que f est un projecteur.
5. Déterminer les éléments caractéristiques de f.

BL2 **Sujet 3**
Semaine de colle: 23

Autres sujets posés sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Théorème de Pythagore.

Exercice

Soit $f : (x, y) \mapsto x \times \exp(x(y^2+1))$.

1. Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x, y) \geqslant x \times \exp(x)$.
2. Étudier rapidement la fonction g suivante : $g : x \mapsto x \times \exp(x)$ et trouver la valeur de son minimum s'il existe.
3. En déduire que f admet un minimum sur $\mathbb{R}^2$ atteint en un seul point.
4. Démontrer de nouveau ce résultat grâce aux théorèmes de votre cours.

Exercice

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est M avec

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f est un projecteur vectoriel.
2. Déterminer les éléments caractéristiques de f.