BCPST1 **Sujet 1**
Semaine de colle: 20

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Définition et caractérisation de la borne supérieure. Évaluer celle de $]-\infty, 1[$.

Exercice 1

On pose : $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^3 et en déduire que A est inversible. Donner son inverse.
2. Calculer B^3 et en déduire que B n'est pas inversible.
3. Calculer $C^3 - 4C^2 + C + 6I_3$ et en déduire que C est inversible. Donner son inverse.

Exercice 2

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1/2 \\ -2 & 2 & 1/2 \\ -2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. On pose $\Delta = P^{-1}AP$. Expliciter Δ.
3. Exprimer A en fonction de P et Δ.
4. En déduire A^n avec n entier naturel.

BCPST1 **Sujet 2** Semaine de colle: 20

Sujet disponible sur: cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Résultats sur les limites des suites monotones. Démontrer qu'une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Exercice 1

Soit $C = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -10 \\ 2 & -5 & 10 \\ 2 & -6 & 11 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $C^2 - 4C$ et en déduire que C est inversible.
2. Montrer que pour tout entier naturel k , il existe deux réels a_k et b_k tels que :

$$C^k = a_k C + b_k I_3$$

Exercice 2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, il existe des entiers naturels x_n et y_n tels que :

$$A^n = \begin{pmatrix} x_n & y_n & y_n \\ y_n & x_n & y_n \\ y_n & y_n & x_n \end{pmatrix}$$

et que : $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = 2(x_n + y_n) \\ y_{n+1} = x_n + 3y_n \end{cases}$.

2. Montrer que la suite $(x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et déterminer la valeur de $x_n - y_n$ pour tout entier naturel n.
3. En déduire une relation entre x_{n+1} et x_n valable pour tout entier naturel n, puis déterminer x_n en fonction de n.
4. En déduire l'expression de A^n pour tout entier naturel non nul n.

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Définition et propriétés des suites adjacentes. Démonstration du théorème.

Exercice 1

Soient $a \in \mathbb{C}$ et M la matrice $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$. Soit J la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Exprimer M en fonction de a, I_4 et J.
2. Trouver une relation très simple entre J^2 et J. En déduire une expression de M^2 en fonction de M et I_4.
3. Trouver les valeurs de a pour lesquelles M est inversible, et déterminer M^{-1} le cas échéant.
4. Calculer J^3 en fonction de J puis J^4 en fonction de J. Conjecturer et démontrer une formule reliant J^n à J pour $n \in \mathbb{N}^*$.
5. En déduire le calcul de M^n pour tout entier naturel n.

Exercice 2

1. Soit θ un réel et soit $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. Déterminer A^k pour tout entier naturel k.
2. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par :

$$x_0 = 1, y_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} & = \cos(\theta)x_n - \sin(\theta)y_n \\ y_{n+1} & = \sin(\theta)x_n + \cos(\theta)y_n \end{cases}$$

   Expliciter x_n et y_n pour tout entier naturel n.