

Question de cours

Définition et caractérisation de la borne supérieure. Évaluer celle de $] - \infty, 1[$.

Exercice 1

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1/2 \\ -2 & 2 & 1/2 \\ -2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} .
2. On pose $\Delta = P^{-1}AP$. Expliciter Δ .
3. Exprimer A en fonction de P et Δ .
4. En déduire A^n avec n entier naturel.

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les deux suites définies par : $u_0 = 1, v_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n , $\frac{2}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$. Soit n un entier naturel.

1. Montrer que $u_n > 0, v_n > 0$ et $u_n \leq v_n$.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et qu'elles convergent vers la même limite.
3. Étudier la suite $(u_n \times v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et déterminer la valeur de la limite commune de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Question de cours

Résultats sur les limites des suites monotones. Démontrer qu'une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Exercice 1

Soit $C = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -10 \\ 2 & -5 & 10 \\ 2 & -6 & 11 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $C^2 - 4C$ et en déduire que C est inversible.
2. Montrer que pour tout entier naturel k , il existe deux réels a_k et b_k tels que :

$$C^k = a_k C + b_k I_3$$

Exercice 2

Pour tout entier naturel non nul n , on pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{2n^2}.$$

On note l la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Soit ε un réel non nul. On considère les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\begin{cases} a_1 &= l - 1 \\ b_1 &= l - 1 + \varepsilon \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} a_{n+1} &= \frac{n+1}{n} a_n - \frac{1}{(n+1)^2} \\ b_{n+1} &= \frac{n+1}{n} b_n - \frac{1}{(n+1)^2} \end{cases}.$$

1. Démontrer que l est bien définie et justifier que, pour tout entier naturel non nul n , on a :

$$0 \leq l - u_n \leq \frac{1}{2n^2}.$$

2. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n , on a :

$$a_n = n(l - u_n) \quad \text{et} \quad b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{n+1}{n} \times (b_n - a_n).$$

3. En déduire les limites des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Question de cours

Définition et propriétés des suites adjacentes. Démonstration du théorème.

Exercice 1

1. Soit θ un réel et soit $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. Déterminer A^k pour tout entier naturel k .
2. Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites définies par :

$$x_0 = 1, y_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} &= \cos(\theta)x_n - \sin(\theta)y_n \\ y_{n+1} &= \sin(\theta)x_n + \cos(\theta)y_n \end{cases}$$

Expliciter x_n et y_n pour tout entier naturel n .

Exercice 2

On définit les suites $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par :

$$(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$$

et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (H_n - \ln(n+1))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (H_n - \ln(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$.

1. Montrer que, pour tout entier n non nul, on a : $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$.

2. En déduire la limite de la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

3. Montrer que, pour tout entier réel x strictement supérieur à -1 , on a : $\ln(1+x) \leq x$.

4. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \leq \frac{1}{n}.$$

5. Montrer que, pour tout entier n non nul, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln \left(1 + \frac{1}{n+1} \right) \text{ et } v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

6. Déduire de la question précédente la limite de la suite $(H_{2n} - H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.