

Question de cours

Définition et caractérisation de la borne supérieure. Évaluer celle de $] - \infty, 1[$.

Exercice 1

Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

1. $u_{1,n} = \frac{\cos(n)}{n}$

3. $u_{3,n} = n \sin\left(\frac{1}{n^2 + n^3}\right)$

2. $u_{2,n} = \exp\left(1 - \frac{(-1)^n}{n}\right)$

4. $u_{4,n} = \frac{\lfloor xn^2 \rfloor}{n}$

Pour tout $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, étudier la convergence de $(u_{i,n})_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les deux suites définies par : $u_0 = 1, v_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n , $\frac{2}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$. Soit n un entier naturel.

1. Montrer que $u_n > 0, v_n > 0$ et $u_n \leq v_n$.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et qu'elles convergent vers la même limite.
3. Étudier la suite $(u_n \times v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et déterminer la valeur de la limite commune de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Question de cours

Résultats sur les limites des suites monotones. Démontrer qu'une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Exercice 1

Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$1. u_{1,n} = \frac{\lfloor xn \rfloor}{n} \qquad 2. u_{2,n} = n \cos\left(\frac{1}{n}\right) \qquad 3. u_{3,n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^2}$$

Pour tout $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, étudier la convergence de $(u_{i,n})_{n \in \mathbb{N}^*}$

Exercice 2

Pour tout entier naturel non nul n , on pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{2n^2}.$$

On note l la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Soit ε un réel non nul. On considère les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\begin{cases} a_1 &= l - 1 \\ b_1 &= l - 1 + \varepsilon \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} a_{n+1} &= \frac{n+1}{n} a_n - \frac{1}{(n+1)^2} \\ b_{n+1} &= \frac{n+1}{n} b_n - \frac{1}{(n+1)^2} \end{cases}.$$

1. Démontrer que l est bien définie et justifier que, pour tout entier naturel non nul n , on a :

$$0 \leq l - u_n \leq \frac{1}{2n^2}.$$

2. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n , on a :

$$a_n = n(l - u_n) \quad \text{et} \quad b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{n+1}{n} \times (b_n - a_n).$$

3. En déduire les limites des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Question de cours

Définition et propriétés des suites adjacentes. Démonstration du théorème.

Exercice 1

Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$1. u_{1,n} = \sqrt{n(n+1)} - n \quad 2. u_{2,n} = \frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n} \quad 3. u_{3,n} = \ln(n+1) - \ln(n).$$

Pour tout $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, étudier la convergence de $(u_{i,n})_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 2

On définit les suites $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par :

$$(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$$

et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (H_n - \ln(n+1))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (H_n - \ln(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$.

1. Montrer que, pour tout entier n non nul, on a : $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$.

2. En déduire la limite de la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

3. Montrer que, pour tout entier réel x strictement supérieur à -1 , on a : $\ln(1+x) \leq x$.

4. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}.$$

5. Montrer que, pour tout entier n non nul, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \quad \text{et} \quad v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

6. Déduire de la question précédente la limite de la suite $(H_{2n} - H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.