BCPST1 **Sujet 1**
Semaine de colle: 22

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

## Question de cours

Énoncer et démontrer le théorème de Rolle et des accroissements finis.

## Exercice 1

Montrer que $f$ est dérivable avec :

$$f : \begin{cases} [0,+\infty[ & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{x^2e^{-x}}{1-e^{-x}} & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{cases}.$$

## Exercice 2

Soit $f_n : x \mapsto x^n + x - 1$ avec $n$ un entier naturel non nul.

1. Montrer que $f_n$ s'annule une seule fois sur $[0,1]$. On note $a_n$ ce réel.
2. Trouver le signe de $f_{n+1}(a_n)$ et en déduire les variations de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Trouver la limite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}(nu_n) = +\infty$.

BCPST1 **Sujet 2** Sujet disponible sur:
Semaine de colle: 22 cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

## Question de cours

Énoncer et démontrer le théorème des valeurs intermédiaires.

## Exercice 1

Prolonger par continuité en 0 la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^\star$ par $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ puis montrer que $f$ est classe $\mathcal{C}^2$ (*demander à votre gentil colleur ce que cela veut dire*).

## Exercice 2

Étudier la fonction $f$ suivante :

$$f : x \mapsto x^2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

BCPST1 **Sujet 3**
Semaine de colle: 22

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

## Question de cours

Expliquer le principe de prolongement d'une fonction par continuité. L'illustrer sur un exemple simple.

## Exercice 1

Démontrer que, pour tout réel $x$ strictement positif, on a :

$$\ln(x) \leqslant x - 1.$$

## Exercice 2

On considère la fonction $f$ définie sur $I = ]0, +\infty[$ par $f(x) = x + \ln(x)$.

1. (a) Montrer que $f$ a un unique point fixe sur $I$ que l'on déterminera, cela signifie qu'il y a un unique réel strictement positif $\alpha$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.
   (b) Montrer que $f$ réalise une bijection de $I$ vers un intervalle $J$ à déterminer.
2. On note $g$ l'application de $J$ dans $I$, bijection réciproque de $f : I \to J$.
   (a) Montrer que $g$ est dérivable sur $J$ et que : $\forall x \in J$, $g'(x) = \dfrac{g(x)}{1 + g(x)}$. En déduire la valeur de $g'(1)$.
   (b) Montrer que $g(y) \underset{y \to +\infty}{\sim} y$.