BCPST1 **Sujet 1**
Semaine de colle: 25

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Donner la définition et la caractérisation du noyau d'une application linéaire. Énoncer et démontrer les propriétés du noyau.

Exercice 1

Soient les applications :

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto (xy, z) \end{cases} \quad \text{et} \quad f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto (x-y, z, y+x) \end{cases}$$

1. Préciser à chaque fois si ces applications suivantes sont ou non linéaires.
2. Donner les matrices canoniquement associées aux applications linéaires de cet exercice.
3. Évaluer le rang des applications linéaires de cet exercice.
4. Préciser si les applications linéaires de cet exercice sont injectives (resp. surjectives, bijectives) ?

Exercice 2

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associée à A.

1. Expliciter f.
2. Montrer que $A^3 - 2A^2 + A - 2I_3 = 0$.
3. En déduire que f est un endomorphisme bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f.

BCPST1 **Sujet 2**
Semaine de colle: 25

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Donner la définition et la caractérisation de l'image d'une application linéaire. Énoncer et démontrer les propriétés de l'image.

Exercice 1

Soient les applications :

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto (|x|-x, |y|-y) \end{cases} \quad \text{et} \quad f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto (x-y, y+x) \end{cases}$$

1. Préciser à chaque fois si ces applications suivantes sont ou non linéaires.
2. Donner les matrices canoniquement associées aux applications linéaires de cet exercice.
3. Évaluer le rang des applications linéaires de cet exercice.
4. Préciser si les applications linéaires de cet exercice sont injectives (resp. surjectives, bijectives) ?

Exercice 2

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associée à A.

1. Montrer que f est un endomorphisme bijecif.
2. On note $u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,-1,1), u_3 = (4,2,1)$ et $B = (u_1,u_2,u_3)$. Montrer que B est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice D associée à f dans cette base.
3. Vérifier que : $A = R.D.R^{-1}$ avec $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
4. Évaluer, pour tout entier naturel n, $f^n(2,0,2)$.

BCPST1 **Sujet 3**
Semaine de colle: 25

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Énoncer et démontrer la caractérisation d'une application linéaire à l'aide de son rang.

Exercice 1

Soient les applications :

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto (x^2, 0) \end{cases} \quad \text{et} \quad f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto (x-y, z-y) \end{cases}$$

1. Préciser à chaque fois si ces applications suivantes sont ou non linéaires.
2. Donner les matrices canoniquement associées aux applications linéaires de cet exercice.
3. Évaluer le rang des applications linéaires de cet exercice.
4. Préciser si les applications linéaires de cet exercice sont injectives (resp. surjectives, bijectives) ?

Exercice 2

Soient $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associée à A.

1. Trouver deux réels x et y tels que $(1, x, y)$ soit une base de $\mathrm{Ker}(f - 3id)$.
2. Trouver quatre réels z t, u et v tels que $((1, z, t), (1, u, v))$ soit une base de $\mathrm{Ker}(f + 3id)$.
3. On note $B = ((1, x, y), (1, z, t), (1, u, v))$. Montrer que B est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice D associée à f dans cette base.