MPSI **Sujet 1** — Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 1 — cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Soient a et b deux réels. Rappeler la formule avec $\cos(a+b)$, démontrer les formules avec $\cos(a-b)$ puis $\cos(2a)$.

Exercice 1

1. Préciser l'ensemble de définition, de continuité et de dérivabilité des fonctions suivantes puis calculer les fonctions dérivées si elles existent :
   (a) $h : x \mapsto \ln(|x|) + \ln\left(\left|\dfrac{1}{x}\right|\right)$
   (b) $g : x \mapsto \begin{cases} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
   (c) $w : x \mapsto \begin{cases} x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
2. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que si f est impaire alors f' est paire.

Exercice 2

1. On admet que $(n+1)^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k} n^k$ pour tout couple d'entiers naturels (p, n). Expliciter en particulier $(n+1)^4$ et $(n+1)^5$.
2. En déduire que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{n^5}{5} + \dfrac{n^4}{2} + \dfrac{n^3}{3} - \dfrac{n}{30}$ est un entier.
3. Cette question n'a rien à voir avec les précédentes. Rappeler la formule $\cos(a+b)$ puis résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante d'inconnue x réel :

$$\sqrt{12}\cos(3x) - 2\sin(3x) = -\sqrt{12}.$$

MPSI **Sujet 2**
Semaine de colle: 1

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Soient a et b deux réels. Rappeler la formule avec $\sin(a+b)$, démontrer les formules avec $\sin(a-b)$ et $\sin(2a)$.

Exercice 1

1. Préciser l'ensemble de définition, de continuité et de dérivabilité des fonctions suivantes puis calculer les fonctions dérivées si elles existent :
   (a) $h : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} \dfrac{(\sin(\pi x))^2}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{cases}$
   (b) $f : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} (1-\exp(-x))\ln(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$
   (c) $f : x \mapsto \ln(\ln(\ln(x)))$
2. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que si f est 3-périodique alors f' est 3-périodique.

Exercice 2

Les deux questions qui suivent sont totalement indépendantes.

1. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a :
$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k^6 = (-1)^{n-1}\frac{n^6+3n^5-5n^3+3n}{2}.$$
2. Résoudre l'équation suivante d'inconnue $t \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$:
$$\frac{2\tan(t)}{1+\tan^2(t)} = \frac{1}{2}$$
et en déduire la valeur exacte de $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

MPSI **Sujet 3**
Semaine de colle: 1

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Soient a et b deux réels. Rappeler les formule avec $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$, démontrer les formules avec $\tan(a+b)$, $\tan(a-b)$ et $\tan(2a)$.

Exercice 1

1. Préciser l'ensemble de définition, de continuité et de dérivabilité des fonctions suivantes puis calculer les fonctions dérivées si elles existent :
   (a) $f : x \mapsto \sqrt{|1-x^2|}$
   (b) $f : x \mapsto |\sin(x)|$
   (c) $f : x \mapsto \ln\left(|x^2-5x+6|\right)$
2. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que si f est paire alors f' est impaire.

Exercice 2

Les deux questions qui suivent sont totalement indépendantes.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$
2. Soient n un entier naturel non nul et x un réel. Montrer que :
$$\cos\left((n+1)x\right) + \cos\left((n-1)x\right) = 2\cos(x)\cos(nx)$$
puis exprimer $\cos(3x)$ uniquement en fonction de $\cos(x)$ et en déduire comment résoudre l' équation suivante d'inconnue x réel puis préciser les solutions comprises dans $]-\pi,\pi]$:
$$4\cos^3(x) - 3\cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$