

Question de cours

Rappeler la définition de l'injectivité d'une application. Donner sa caractérisation pratique et la démarche à suivre pour l'établir.

Exercice 1

1. Donner l'écriture algébrique des nombres complexes suivants :

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2 \text{ et } \frac{2-3i}{1+i} + \frac{1-2i}{1-i}.$$

2. Déterminer à quelles conditions sur $\operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(z)$ le nombre Z est réel ou imaginaire pur avec :

$$Z = z^2 + z + 1.$$

Exercice 2

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto |3x - 1| + 4 \end{cases}$

1. Est-ce que l'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
2. Donner une restriction de f bijective et déterminer sa réciproque.

Question de cours

Rappeler la définition de la surjectivité d'une application. Donner sa caractérisation pratique et la démarche à suivre pour l'établir.

Exercice 1

1. Donner l'écriture algébrique des nombres complexes suivants :

$$(2 + 5i)(-3 + i), (2 + i)^4 \text{ et } \frac{(3 + 2i)(1 + i)}{i - 1}.$$

2. Déterminer à quelles conditions sur $\operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(z)$ le nombre Z est réel ou imaginaire pur avec :

$$Z = \frac{z + i}{z - 1}.$$

Exercice 2

Soit f une fonction numérique telle que, pour tout x réel, sous réserve d'existence, on a :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}.$$

1. Donner le domaine de définition D de f
2. $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est elle surjective, resp. injective?
3. Déterminer D_0 de sorte que la restriction de f à D_0 au départ et $f(D)$ à l'arrivée, f_0 soit une bijection et donner une expression de sa bijection réciproque.

Question de cours

Définir l'application réciproque d'une bijection. En pratique, comment détermine-t-on son expression ?

Exercice 1

1. Donner l'écriture algébrique des nombres complexes suivants :

$$(2 - 5i)(3 + i), (2 - i)^3 \text{ et } \frac{1}{1 + i}.$$

2. Déterminer à quelles conditions sur $\operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(z)$ le nombre Z est réel ou imaginaire pur avec :

$$Z = \frac{z^2}{z + 2i}.$$

Exercice 2

Soient E, F et G trois ensembles non vides et $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications.

- 1.(a) Montrer que si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
- (b) Montrer que si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.
2. On considère désormais les applications suivantes :

$$f : \begin{cases} \mathbb{N} & \rightarrow \mathbb{N} \\ n & \mapsto n + 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad g : \begin{cases} \mathbb{N} & \rightarrow \mathbb{N} \\ n & \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ n - 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

- (a) Étudier l'injectivité et la surjectivité de f et de g .
- (b) Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$ puis conclure.