MPSI **Sujet 1**
Semaine de colle: 5

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Expliciter $\cos(\arcsin(x))$ et $\sin(\arccos(x))$ avec x dans... et en déduire $\arcsin'$ et $\arccos'$.

Exercice 1

1. Prouver de deux façons différentes que, pour tout x de $[-1,1]$, on a :
$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}.$$
2. Montrer que $2\arccos\left(\frac{3}{4}\right) = \arccos\left(\frac{1}{8}\right)$.

Exercice 2

1. Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sin(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}dt$, $\displaystyle\int_e^3 \frac{dt}{t\ln(t)}$ et $\displaystyle\int_1^e \frac{\sqrt{1+\ln(t)}}{t}dt$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t}dt$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^t}dt$ et enfin $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{\exp(\cos(t))}dt$.

MPSI **Sujet 2**
Semaine de colle: 5

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Expliciter $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ avec x réel non nul.

Exercice 1

1. Proposer une nouvelle démonstration de la question de cours!
2. Montrer que $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ pour tout réel x et en déduire que pour tout $x \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$, on a : $\arccos(1-x^2) = 2\arctan(x) \iff x \in \{0, 1\}$.

Exercice 2

1. Calculer $\displaystyle\int_1^e \frac{\cos(\ln(t))dt}{t}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(\arctan(t))dt}{1+t^2}$.
2. Calculer $\displaystyle\int_1^2 2^t dt$, $\displaystyle\int_1^e \frac{\sqrt{\ln(t)}}{t}dt$ et enfin $\displaystyle\int_1^{10} \frac{1}{(x+1)(x+2)}dx$.

MPSI **Sujet 3**
Semaine de colle: 5

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Démontrer les propriétés classiques de ln.

Exercice 1

Démontrer ces égalités :

$$2\arctan\left(\frac{1}{5}\right) = \arctan\left(\frac{5}{12}\right) \quad \text{et} \quad 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) = \arctan\left(\frac{120}{119}\right)$$

et en déduire que $\frac{\pi}{4}$ est $4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$.

Exercice 2

1. On pose $I = \displaystyle\int_1^{10} \frac{1}{x \times (1+x+x^2)} dx$. Calculer I après avoir trouvé des réels a, b et c tels que, pour tout réel non nul x, on ait :
$$\frac{1}{x \times (1+x+x^2)} = \frac{a}{x} - \frac{bx+c}{1+x+x^2}.$$
2. Calculer $\displaystyle\int_3^7 t\exp\left(-t^2\right) dt$, $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{(\arctan(t))} \times (1+t^2)} dt$ puis $\displaystyle\int_1^2 \frac{(\ln(x))^2}{x} dx$.