MPSI **Sujet 1**
Semaine de colle: 6

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Déterminer une primitive de $\theta \mapsto \dfrac{1}{\sin(\theta)}$ en posant $t = \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$.

Exercice 1

Soit m un entier naturel non nul. Pour tout entier naturel n tel que $n \leqslant m$, on pose :

$$I_n = \int_0^1 x^n (1-x)^{m-n} dx.$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n tel que $n < m$, on a :

$$I_n = \frac{m-n}{n+1} I_{n+1}.$$

2. Expliciter, pour tout entier naturel n, I_n.

Exercice 2

Trouver les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout réel x, on ait :

$$3\int_0^x f(t)dt = 2xf(x).$$

Question de cours

Solution d'une équa diff linéaire homogène d'ordre un avec démo....

Exercice 1

Démontrer que : $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln(\cos(x))dx = \int_0^{\pi/4} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) dx$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan(x))dx$.

Exercice 2

Soit (E) l'équation différentielle :

$$xy' + (1 - x)y = 3x^2 + 2.$$

1. Résoudre (E) sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer qu'il existe une unique solution f de (E) sur $]0, +\infty[$ qui peut se prolonger par continuité en 0 et déterminer cette solution.

MPSI **Sujet 3** Sujet disponible sur:
Semaine de colle: 6 cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Montrer que la solution générale d'une équation (E) avec second membre est la somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de l'équation homogène associée.

Exercice 1

Pour tout couple d'entiers naturels (n, p), on pose : $J_{n,p} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\cos^p(t)dt$.

1. Montrer que $J_{n,p} = J_{n,p-2} - J_{n+2,p-2}$ si n est un entier naturel et si p est un entier supérieur à 2.
2. Montrer que $J_{n,p} = \dfrac{p-1}{n+1} J_{n+2,p-2}$ si n est un entier naturel et si p est un entier supérieur à 2.
3. Montrer que $J_{n,p} = \dfrac{p-1}{n+p} J_{n,p-2}$ si n est un entier naturel et si p est un entier supérieur à 2 et $J_{n,p} = \dfrac{n-1}{n+p} J_{n-2,p}$ si p est un entier naturel et si n est un entier supérieur à 2.
4. En déduire $J_{n,p}$.

Exercice 2

Résoudre l'équation différentielle (E) suivante d'inconnue y fonctions deux fois dérivable :

$$(1 + x^2)y'' + 2xy' - 2 = 0. \ (E)$$