MPSI **Sujet 1**
Semaine de colle: 8

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Composée de deux injections, deux surjections, deux bijections...

Exercice 1

Soient f et g les applications suivantes :

$$f : \begin{cases} \mathbb{N} & \mathbb{N} \\ n & \mapsto n+1 \end{cases} \quad \text{et} \quad g : \begin{cases} \mathbb{N} & \mathbb{N} \\ n & \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ n-1 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

1. f est-elle injective, surjective, bijective ? Même question avec g.
2. Expliciter $f \circ g$ et $g \circ f$ puis conclure en disant en quoi cet exercice est un exemple/contre-exemple d'une propriété de l'excellent du cours de M Irigoyen que l'on citera précisément.

Exercice 2

Soit E un ensemble non vide et A une partie de E.

1. On considère $f : \begin{cases} \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E) \\ B \mapsto B \cap A \end{cases}$.
   (a) On suppose $A = E$. Déterminer $f(B)$ pour toute partie B de E. Quelle est l'application f dans ce cas ?
   (b) On suppose $A \neq E$. Il existe donc un élément a de E tel que $a \notin A$.
      i. Le sous-ensemble $\{a\}$ admet-il un antécédent par f ? f est-elle surjective ?
      ii. Déterminer $f(\{a\})$ et $f(\varnothing)$. f est-elle injective ?
2. On considère $g : \begin{cases} \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E) \\ B \mapsto B \cup A \end{cases}$.
   (a) On suppose $A = \varnothing$. Déterminer $g(B)$ pour toute partie B de E. Quelle est l'application g dans ce cas ?
   (b) On suppose $A \neq \varnothing$. Il existe donc un élément a de A.
      i. L'ensemble vide $\varnothing$ admet-il un antécédent par g ? g est-elle surjective ?
      ii. Déterminer $g(\{a\})$ et $g(\varnothing)$. g est-elle injective ?

MPSI **Sujet 2**
Semaine de colle: 8

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Composée de deux bijections et expression de $(g \circ f)^{-1}$.

Exercice 1

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto |3x-1|+4 \end{cases}$

1. Est-ce que l'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
2. Donner une restriction de f bijective et déterminer sa réciproque.

Exercice 2

Soit $f(x,y) = \ln\left(\dfrac{1-x^2}{1+y}\right)$ où $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f (on mettra en évidence une réunion de produits cartésiens).
2. Déterminer la ligne de niveau 0 de f, c'est-à-dire l'ensemble des réels $(x,y) \in D_f$ tels que $f(x,y) = 0$. Représenter graphiquement cette ligne de niveau.
3. Déterminer le domaine de définition D_g de la fonction $g : t \mapsto f(0,t)$ et étudier ses variations sur D_g (en précisant les limites aux bornes).
4. L'application $\left\{ \begin{array}{rcl} D_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array} \right.$ est-elle injective ? Surjective ? Justifier.

MPSI **Sujet 3**
Semaine de colle: 8

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Montrer que la relation de congruence modulo n est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

Exercice 1

Soit f une fonction numérique telle que, pour tout x réel, sous réserve d'existence, on a :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}.$$

1. Donner le domaine de définition D de f
2. $f : D \to \mathbb{R}$ est elle surjective, resp. injective ?
3. Déterminer D_0 de sorte que la restriction de f à D_0 au départ et $f(D)$ à l'arrivée, f_0 soit une bijection et donner une expression de sa bijection réciproque.

Exercice 2

Soit E un ensemble. Si X et Y sont deux parties de E, on note $X \triangle Y$ la partie de E définie par :

$$X \triangle Y = (X \cup Y) \backslash (X \cap Y).$$

1. (a) Faire un dessin représentant X et Y et hachurer la partie $X \triangle Y$ de E.
   (b) Montrer : $\forall (X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2$, $X \triangle Y = (X \backslash Y) \cup (Y \backslash X)$.
2. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ et f_A l'application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$ définie par :

$$\forall X \in \mathcal{P}(E),\ \ f_A(X) = X \Delta A.$$

   (a) Montrer : $\forall X \in \mathcal{P}(E)$, $(X \Delta A) \Delta A = X$. Que cela signifie-t-il sur l'application $f_A \circ f_A$?
   (b) En déduire que f_A est bijective et expliciter la bijection réciproque f_A^{-1}.