MPSI **Sujet 1**
Semaine de colle: 7

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

1. Pour quels r dans $\mathbb{K}$ la fonction $x \mapsto \exp(rx)$ est-elle solution de l'équation homogène $y'' + ay' + by = 0$?
2. On suppose que le discriminant de l'équation $X^2 + aX + b = 0$ est nul et on note r_0 la racine double. Montrer que $x \mapsto x\exp(r_0 x)$ est solution de l'équation homogène $y'' + ay' + by = 0$.

Exercice 1

Résoudre les systèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+3z & = & 2 \\ 3x+y+2z & = & 1 \\ 2x+3y+z & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{puis} \quad \left\{\begin{array}{llcl} & -y+2z+3t & = & 0 \\ 2x & +2y-z & = & 0 \\ 3x & -y+2z-2t & = & 0 \\ 5x & +y+z-2t & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 2

1. Résoudre les équations différentielles suivantes d'inconnue y fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$:
$$y'' - 7y' + 10y = 10x^2 - 24x + 9 \ (E_1) \ \text{ et } \ y'' - 2y' + 5y = \exp(x)\cos(2x) \ (E_2).$$
2. Discuter suivant les valeurs du réel m de l'ensemble des solutions de l'équation différentielle suivante d'inconnue y fonctions deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$:
$$y'' + 2my' + y = \exp(-x).$$
3. Résoudre l'équation différentielle (E) suivante d'inconnue y fonctions deux fois dérivable :
$$(1+x^2)y'' + 2xy' - 2 = 0. \ (E).$$

MPSI **Sujet 2**
Semaine de colle: 7

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Résoudre l'équation $y'' - y' - 2y = 10\cos(x)$ d'inconnue y fonction deux fois dérivable.

Exercice 1

Résoudre les systèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{llll} & -y+2z+3t & = & 0 \\ 2x & +2y-z & = & 0 \\ 3x & -y+2z-2t & = & 0 \\ 5x & +y+z-2t & = & 1 \end{array}\right. \quad \text{puis} \quad \left\{\begin{array}{ll} x+3y-7z+2t & =1 \\ 2x+2y+z+2t & =0 \\ x-y-2z+t & =-1 \\ x+7y-4z+t & =3 \end{array}\right.$$

Exercice 2

1. Résoudre l' équation différentielle suivante d'inconnue y fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$:
$$y'' + y = \sin(\lambda x) \quad (E_\lambda)$$
où λ est un réel non nul tel que $\lambda^2 \neq 1$.
2. Discuter suivant les valeurs du réel m de l'ensemble des solutions de l'équation différentielle suivante d'inconnue y fonctions deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$:
$$y'' + 2my' + y = 0.$$
3. On veut résoudre l'équation différentielle suivante d'inconnue y fonctions deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$:
$$x^2y'' + xy' - 4y = 4x^2 \ (E).$$
   (a) On suppose que f vérifie (E). On pose alors $g : t \mapsto f(e^t)$. Montrer que g vérifie (E') une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.
   (b) Résoudre (E') sachant qu'il existe a, b et c trois réels tels que $x \mapsto ax^2 + bx + c$ soit solution de (E').
   (c) En déduire les solutions de (E).

MPSI **Sujet 3** Sujet disponible sur:
Semaine de colle: 7 cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Résoudre le système $\begin{cases} x+2y-z &= 3 \\ x+3y+z &= 5 \\ 3x+8y+4z &= 17 \end{cases}$ d'inconnue (x,y,z) dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 1

Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x+2y+3z &= 10 \\ 5y+12z &= 22 \\ 7z &= 7 \end{cases} \quad \text{puis} \quad \begin{cases} x+3y-z+t &= 1 \\ 2x+13y-7z+2t &= 2 \\ x-y+z+t &= 0 \\ x+7y-4z+t &= -1 \end{cases}$$

Exercice 2

1. Soit n un entier naturel supérieur à 2. On cherche la (ou les) fonction(s) réelle(s) vérifiant les trois conditions suivantes :
$$\frac{1}{n^2}y'' + y = \sin(t),\ \ y(0)=0 \ \text{ et } \ y'(0)=0 \ (E_n)$$
2. On considère les équations différentielles (E) : $(2-6x+2x^2)y-(3x^2-4x)y'+x^2y''=2$ et (L) : $z''-3z'+2z=2$.
   (a) Résoudre (L) sur $\mathbb{R}$.
   (b) Trouver un entier relatif k tel que $x \mapsto x^k$ soit solution de (E) sur $]0,+\infty[$.
   (c) Pour cet entier k, montrer que la fonction $u : x \mapsto x^k \times v(x)$ est solution de (E) sur $]0,+\infty[$ si et seulement si v est solution de (L) sur $]0,+\infty[$.
   (d) En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $]0,+\infty[$.