BCPST1 **Sujet 1**
Semaine de colle: 8

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Donner et justifier les formes trigonométrique et exponentielle d'un nombre complexe non nul. Énoncer et démontrer les formules d'Euler.

Exercice 1

Ensemble de définition et parité/imparité/périodicité de :

$$x \mapsto \sqrt{\frac{x+1}{2-x}}, x \mapsto \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{2-x}} \text{ et } x \mapsto \frac{\exp(\sin(x))-1}{\exp(\sin(x))+1}.$$

Exercice 2

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Exprimer $z^3 - 1$ sous forme d'un produit de deux facteurs.
2. En déduire les solutions complexes de l'équation $z^3 = 1$ d'inconnue z complexe.
3. (a) Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que z est solution de $z^3 = -5 + i\sqrt{2}$ si et seulement si $\dfrac{z}{1+i\sqrt{2}}$ est solution de l'équation $z^3 = 1$ d'inconnue z complexe.
   (b) En déduire les solutions complexes de l'équation $z^3 = -5 + i\sqrt{2}$ d'inconnue z complexe.
4. De même, donner les solutions des équations $z^3 = 5 - i\sqrt{2}$ et $z^3 = 5 + i\sqrt{2}$ d'inconnue z complexe.

BCPST1 **Sujet 2**
Semaine de colle: 8

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Symétrie des courbes des fonctions impaires : énoncé et démonstration du résultat.

Exercice 1

On pose $u = \sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}$. Déduire du calcul de u^2 et de u^4 la forme exponentielle de u.

Exercice 2

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Linéariser $\cos^3(\theta)$ puis exprimer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$.
2. Soit f la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 4x^3 - x^2 - 4x + 2$.
   (a) Déterminer les variations de f sur $[-1, 1]$.
   (b) Soit z un nombre complexe de module 1 et θ un de ses arguments. Établir :
   $$\left|z^3 - z + 2\right|^2 = 4f(\cos(\theta))$$
3. En déduire que, pour tout complexe z de module 1, on a : $|z^3 - z + 2| \leqslant \sqrt{13}$.
4. Préciser les complexes z de module 1 vérifiant $|z^3 - z + 2| = \sqrt{13}$.

BCPST1 **Sujet 3** Semaine de colle: 8

Sujet disponible sur: cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation du second degré à coefficients réels. Résultat et démonstration.

Exercice 1

Ensemble de définition et parité/imparité/périodicité de :

$$x \mapsto \sqrt{1-2x^2+x^4}, x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2+\cos(x^7)}} \text{ et } x \mapsto \frac{\exp(x^3)-1}{\exp(x^3)+1}.$$

Exercice 2

On note (E) l'équation $1+z+z^2+z^3+z^4=0$ d'inconnue z complexe.

1. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Montrer que :
$$1+z+z^2+z^3+z^4 = \frac{z^5-1}{z-1}.$$
2. En déduire que $e^{\frac{2i\pi}{5}}$ est solution de (E).
3. Soit z une solution de (E). Montrer que, si on pose $x = z + \frac{1}{z}$, alors x est racine d'un polynôme du second degré que l'on explicitera.
4. En déduire une expression explicite de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
5. En s'inspirant de la méthode précédente, donner également une expression explicite de $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.