MPSI **Sujet 1**
Semaine de colle: 9

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Montrer que u est périodique avec u la suite définie par $u_{n+2} = \sqrt{3}u_{n+1} - u_n$ pour tout entier naturel n.

Exercice 1

Soit x un réel. Donner les natures des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ de terme général définies par :

$$\text{Pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{\lfloor xn \rfloor}{n}.$$

Exercice 2

Soient a et b deux réels strictement supérieurs à 1. On étudie la suite numérique $(v_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ par $(v_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}} = \left(\frac{\sqrt{u_n}}{2} - 1\right)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ avec $(u_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = a, \quad u_1 = b \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}.$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et est supérieur à 1.
2. Vérifier que, pour tout entier naturel n, on a : $v_{n+2} = \dfrac{v_{n+1} + v_n}{2(2 + v_{n+2})}$.
3. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $|v_n| \leqslant x_n$ avec $(x_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$x_0 = \left|\frac{\sqrt{a}}{2} - 1\right| \text{ et } x_1 = \left|\frac{\sqrt{b}}{2} - 1\right| \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ x_{n+2} = \frac{x_{n+1}}{3} + \frac{x_n}{3}.$$

4. Expliciter $(x_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$.
5. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)$.

MPSI **Sujet 2**
Semaine de colle: 9

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Étudier la convergence et la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{k}}$ pour tout entier naturel n non nul.

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{-1}{u_n+2}.$$

1. Montrer que l'équation $x = \dfrac{-1}{x+2}$ d'inconnue x réel possède exactement une solution, que l'on notera c.
2. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle bien définie ?
3. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par, pour tout entier naturel n, $v_n(u_n - c) = 1$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.
4. Expliciter le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Exercice 2

Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un réel k de $]0,1[$ tels que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1}| \leqslant k|u_n|$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et de limite nulle.

MPSI **Sujet 3** Sujet disponible sur:
Semaine de colle: 9 cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Montrer que u et v ont même limite avec u la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ pour tout entier naturel n non nul et v la suite définie par $v_n = u_n + \frac{1}{n!n}$ pour tout entier naturel n non nul.

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites définies par : $u_0 = 1, v_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $\frac{2}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$. Soit n un entier naturel.

1. Montrer que $u_n > 0$, $v_n > 0$ et $u_n \leqslant v_n$.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et qu'elles convergent vers la même limite.
3. Étudier la suite $(u_n \times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et déterminer la valeur de la limite commune de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2

Soient $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$w_0 = 0 \text{ et, pour tout entier naturel } n, w_{n+1} = \frac{2w_n + 3}{w_n + 4}.$$

1. $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle bien définie ?
2. Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.
3. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par, pour tout entier naturel n : $z_n = \frac{w_n - 1}{w_n + 3}$.
   Montrer que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
4. Expliciter le terme général de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Si oui, évaluer sa limite.