

Question de cours

Énoncer et démontrer la formule d'intégration par parties

Exercice 1

Calculer $\int_0^1 x^3 \exp(3x) dx$, $\int_0^1 e^{-x} \sin(x) dx$ et $\int_0^1 x \arctan(x) dx$.

Exercice 2

Résoudre les équations différentielles suivantes, d'inconnue y fonctions dérivables, en précisant sur quels intervalles les solutions sont définies :

1. $y' + xy = x^2 + 1$.
2. $(1 + x^2)y' - 2xy = x$.

Question de cours

Définir les sommes de Riemann associées à une fonction f sur un intervalle $[a; b]$. Énoncer le théorème de Riemann. En déduire la valeur de $\int_0^1 e^t dt$.

Exercice 1

Comparer de deux façons différentes $\int_0^{\pi/4} \sin(t) dt$ et $\int_0^{\pi/4} \cos(t) dt$. Même consigne avec $\int_0^1 \frac{1}{1+t} dt$ et $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$.

Exercice 2

Dans le modèle de Verhulst, pour tout réel positif t , on a :

$$N'(t) = r \times \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) N(t)$$

1. En introduisant la fonction $\frac{1}{N}$, expliciter N .
2. Interpréter les cas $N(0) < K$, $N(0) > K$ et $N(0) = K$.

Question de cours

Exposer la méthode de variation de la constante dans le cas général. Montrer qu'elle nous conduit à un simple calcul de primitive.

Exercice 1

Résoudre les équations différentielles suivantes, d'inconnue y fonctions dérivables, en précisant sur quels intervalles les solutions sont définies :

$$y' + \sin(x)y = 2 \sin(x) \text{ puis : } y' - y = x^2 \times (e^x + e^{-x}).$$

Exercice 2

On considère, pour tout entier naturel n , l'application φ_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_n(x) = (1 - x)^n e^{-2x}$$

ainsi que l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 \varphi_n(x) dx$$

On désire étudier le comportement asymptotique de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1. Calculer I_0 et I_1 .

2.(a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

(b) En déduire que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

3. A l'aide d'une intégration par partie, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$.

4. En déduire la limite de la suite $(nI_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $+\infty$.