BCPST1 **Sujet 1**
Semaine de colle: 12

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Retrouver l'expression des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène du second ordre dans le cas où l'équation caractéristique admet une racine double.

Exercice 1

Résoudre les équations différentielles suivantes, d'inconnue y fonctions dérivables, en précisant sur quels intervalles les solutions sont définies :

1. $y' + xy = x^2 + 1$.
2. $(1 + x^2)y' - 2xy = x$.

Exercice 2

Résoudre les équations différentielles suivantes d'inconnue y fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$:

1. $y'' - 7y' + 10y = 10x^2 - 24x + 9$ (E_1) en sachant qu'il existe un polynôme du second degré solution de cette équation différentielle.
2. $(1 + x^2)y'' + 2xy' - 2 = 0$. (E_2)

BCPST1 **Sujet 2** | Sujet disponible sur:
Semaine de colle: 12 | cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Question de cours

Rappeler sans démonstration l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène du second ordre.

Exercice 1

Dans le modèle de Verhulst, pour tout réel positif t, on a :

$$N'(t) = r \times \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) N(t)$$

1. En introduisant la fonction $\frac{1}{N}$, expliciter N.
2. Interpréter les cas $N(0) < K$, $N(0) > K$ et $N(0) = K$.

Exercice 2

Soit n un entier naturel supérieur à 2. On cherche la (ou les) fonction(s) réelle(s) vérifiant les trois conditions suivantes :

$$\frac{1}{n^2}y'' + y = \sin(t),\ \ y(0) = 0 \ \text{ et } \ y'(0) = 0 \ (E_n)$$

1. Vérifier que la fonction y_n ci-dessous est une solution de (E_n) :

$$y_n : t \mapsto \frac{n^2}{n^2-1}\sin(t) + b_n \sin(nt)$$

   avec b_n une constante à préciser.
2. Évaluer y la fonction définie par : Pour tout réel t, $y(t) = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} (y_n(t))$.
3. (E_n) a-t-il d'autres solutions ?

BCPST1 **Sujet 3**
Semaine de colle: 12

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Exposer la méthode de variation de la constante dans le cas général. Montrer qu'elle nous conduit à un simple calcul de primitive.

Exercice 1

Soit m un réel. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$my'' - (1+m^2)y' + my = x \times \exp(x) \quad (E)$$

en sachant qu'il existe un polynôme P_m à coefficients réels (de degré 1 si m n'est pas 1 et de degré 3 si m vaut 1) tel que : $x \mapsto P_m(x) \times \exp(x)$ soit une solution de cette équation.

Exercice 2

On considère les équations différentielles $(E) : (2-6x+2x^2)y - (3x^2-4x)y' + x^2y'' = 2$ et $(L) : z'' - 3z' + 2z = 2$.

1. Résoudre (L) sur $\mathbb{R}$.
2. Trouver un entier relatif k tel que $x \mapsto x^k$ soit solution de (E) sur $]0, +\infty[$.
3. Pour cet entier k, montrer que la fonction $u : x \mapsto x^k \times v(x)$ est solution de (E) sur $]0, +\infty[$ si et seulement si v est solution de (L) sur $]0, +\infty[$.
4. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $]0, +\infty[$.