MPSI **Sujet 1** Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 11 cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Unicité de la limite en cas de convergence.

Exercice 1

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \exp(u_n)$. Montrer que la suite est $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante puis qu'elle n'est pas convergente. et en déduire sa limite.
2. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergeant respectivement vers a et b deux réels. Montrer que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\left(\dfrac{a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0}{n+1}\right) = ab$.

Exercice 2

Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{2n^2}.$$

On note l la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$. Soit ε un réel non nul. On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définies par :

$$\begin{cases} a_1 & = l-1 \\ b_1 & = l-1+\varepsilon \end{cases} \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}^\star, \begin{cases} a_{n+1} & = \dfrac{n+1}{n}a_n - \dfrac{1}{(n+1)^2} \\ b_{n+1} & = \dfrac{n+1}{n}b_n - \dfrac{1}{(n+1)^2} \end{cases}.$$

1. Démontrer que l est bien définie et justifier que, pour tout entier naturel non nul n, on a :
$$0 \leqslant l - u_n \leqslant \frac{1}{2n^2}.$$
2. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a :
$$a_n = n(l-u_n) \quad \text{et} \quad b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{n+1}{n} \times (b_n - a_n).$$
3. En déduire les limites des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$. et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

MPSI **Sujet 2**
Semaine de colle: 11

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Montrer que si $\lim_{n \longrightarrow +\infty} (u_{2n}) = L$ et $\lim_{n \longrightarrow +\infty} (u_{2n+1}) = L$ avec L un réel alors...

Exercice 1

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par u_0 quelconque et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{u_n + u_n^2}{2}.$$

1. Étudier $f : x \mapsto \dfrac{x + x^2}{2}$ et en déduire que, pour tout entier naturel n non nul, u_n appartient à $\left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.
2. En déduire, en fonction de u_0, la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel L, alors $L = 0$ ou $L = 1$.
4. En déduire, en fonction de u_0, la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2

Soient l un réel et k un entier naturel.

1. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle strictement croissante tendant vers $+\infty$, et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}\right) = l.$$

Montrer que $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = l.$

2. Quelle vaut $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\dfrac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}}\right)$?

MPSI **Sujet 3**
Semaine de colle: 11

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Démontrer qu'une suite croissante et majorée converge.

Exercice 1

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par u_0 est un élément de $[0,1]$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Étudier $f : x \mapsto x - x^2$ et en déduire que, pour tout entier naturel n non nul, u_n appartient à $\left[0, \dfrac{1}{4}\right]$.
2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
3. Donner la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2

1. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergeant respectivement vers a et b deux réels. Montrer que :
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(\frac{a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0}{n+1}\right) = ab.$$
2. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $[0,1]$ telles que :
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}(u_nv_n) = 1.$$
Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et que leur limite vaut 1.