MPSI **Sujet 1** — Semaine de colle: 12

Sujet disponible sur: cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Limite et composition (me demander si l'énoncé n'est pas assez explicite).

Exercice 1

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow -2}\left(\dfrac{x+4}{x^2+3x+2}\right)$
2. $\lim\limits_{x\longrightarrow -2}\left(\dfrac{x+2}{x^2+3x+2}\right)$
3. $\lim\limits_{x\longrightarrow 2}\left(\dfrac{\sqrt{x^3-12x+17}-\sqrt{x^3-3x^2+5}}{x^2-4x+4}\right)$
4. $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\left(\dfrac{\lfloor x\rfloor}{x}\right)$

Exercice 2

On appelle $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continues en zéro telle que, $\forall\, x\in\mathbb{R},\ f(2x)=f(x)$ et $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continues en zéro et telle que, $\forall\, x\in\mathbb{R},\ f(2x)=f(x)\cos(x)$.

1. Montrer que, si $f\in\mathcal{C}$, alors f est une fonction constante.
2. Soit $\varphi:\mathbb{R}^\star\to\mathbb{R}$ la fonction définie par : $\forall\, x\in\mathbb{R}^\star,\ \varphi(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}$. Montrer que ψ, le prolongement par continuité en zéro de φ, appartient à $\mathcal{D}$.
3. Soient $f\in\mathcal{D}$, $g_1:\begin{cases}]-\pi,\pi[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \dfrac{f(x)}{\psi(x)}\end{cases}$ et $g_2:\begin{cases} \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}^\star & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \dfrac{f(x)}{\psi(x)}\end{cases}$.
   (a) Montrer que g_1 est une fonction constante.
   (b) En déduire qu'il existe un réel λ tel que : $\forall\, x\in[-\pi,\pi]\,,\ f(x)=\lambda\psi(x)$.
   (c) A l'aide de la fonction g_2, montrer qu'il existe un réel λ tel que :
   $$\forall\, x\in\mathbb{R},\ f(x)=\lambda\psi(x).$$

MPSI **Sujet 2**
Semaine de colle: 12

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Montrer que toute fonction polynomiale de degré impair admet au moins une racine réelle (on se limitera au cas où son coefficient dominant est strictement positif)

Exercice 1

Calculer $\lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(\frac{-x^2+1}{3x+2} \right)$, $\lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2+3x-1} - \sqrt{x^2+x} \right)$ puis montrer que $\lim_{x \longrightarrow +\infty} (\cos(\ln(x)))$ n'existe pas.

Exercice 2

Pour tout m entier naturel, on appelle f_m la fonction suivante : $f_m : x \mapsto x^m + x^2 + 2x - 1$.
Soit n un entier naturel.

1. Montrer qu'il existe un unique réel positif x_n tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Montrer les inégalités suivantes : $0 \leqslant x_n \leqslant \frac{1}{2}$.
3. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone.
4. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

MPSI **Sujet 3**
Semaine de colle: 12

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Démontrer le théorème de Weierstrass/des bornes atteintes (on se limitera à prouver l'existence du maximum)

Exercice 1

Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2+3x-1} - \sqrt{x^2+x}\right)$
2. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \left(1 - x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor\right)$
3. $\lim\limits_{x \longrightarrow 3} \left(\frac{-x^2+x+6}{x^2+9-6x}\right)$
4. $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (x \sin(x))$

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que :

$$\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y).$$

1. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n et tout réel x, on a :$f(nx) = nf(x)$
   (b) Prouver que : $f(0) = 0$.
   (c) Etudier la parité de f.
2. En déduire que :
   (a) pour tout entier naturel n, on a : $f(n) = nf(1)$.
   (b) pour tout entier n, on a : $f(n) = nf(1)$.
   (c) pour tout rationnel x, on a : $f(x) = xf(1)$.
3. Déterminer f.