BCPST1 **Sujet 1** Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 13 cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Énoncer et démontrer le principe de récurrence.

Exercice 1

1. Montrer que $(n+1)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k} n^k$ pour tout couple d'entiers naturels (p, n). Expliciter en particulier $(n+1)^4$ et $(n+1)^5$.
2. En déduire que, pour tout entier naturel n, $\frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$ est un entier.

Exercice 2

Expliciter les suites définies par :

1. $x_0 = 11$, $x_1 = 25$ et, pour tout entier naturel n, $2x_{n+2} = 3x_{n+1} + 2x_n$.
2. $t_0 = 11$ et, pour tout entier naturel n, $2t_{n+2} = 5t_n$.

BCPST1 **Sujet 2**
Semaine de colle: 13

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Rappeler la définition et la technique d'étude des suites arithmético-géométriques.

Exercice 1

Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

Exercice 2

Expliciter les suites définies par :

1. $y_0 = 11$, $y_1 = 25$ et, pour tout entier naturel n non nul, $4y_n = y_{n+1} - 12y_{n-1}$
2. $u_0 = e^3$, $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}$.
3. $w_0 = 11$, $w_1 = 25$ et, pour tout entier naturel n, $2w_{n+2} - 3w_{n+1} - 2w_n = 4$.

BCPST1 **Sujet 3** Sujet disponible sur:
Semaine de colle: 13 cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Énoncer et démontrer la propriété des sommes télescopiques. Application : calculer $\sum_{k=1}^{n} kk!$.

Exercice 1

On prélève cinq cartes d'un jeu de 32 cartes.

1. Combien y a-t-il de mains différentes (une main désignant un ensemble de 5 cartes distinctes) ?
2. Parmi elles, combien contiennent exactement deux cœurs ?
3. Parmi elles, combien contiennent au moins un roi ?
4. Parmi elles, combien contiennent exactement deux paires ?
5. Parmi elles, combien contiennent un full (i.e. un brelan et une paire) ?

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{-1}{u_n+2}.$$

1. Montrer que l'équation $x = \dfrac{-1}{x+2}$ d'inconnue x réel possède exactement une solution, que l'on notera c.
2. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle bien définie ?
3. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par, pour tout entier naturel n, $v_n(u_n - c) = 1$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.
4. Expliciter le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?