MPSI **Sujet 1** Semaine de colle: 13

Sujet disponible sur: cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Dérivée du produit...

Exercice 1

Soient n un entier naturel non nul et f_n la fonction suivante : $f_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+^\star & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^n \ln(x) \end{cases}$.

1. Montrer que $f_n^{(n)}$ existe sur $\mathbb{R}_+^\star$ et qu'il existe une constante a_n à préciser telle que, pour tout réel x strictement positif, on ait : $f_n^{(n)}(x) = n! \ln(x) + a_n$.
2. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k}\right)$.

Exercice 2

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ (avec a et b deux réels tels que $0 < a < b$) telle que : $f(a) = f(b) = 0$. Montrer qu'il existe c élément de $]a;b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(c)}{c}$.

MPSI **Sujet 2**
Semaine de colle: 13

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Démontrer l'égalité des accroissements finis.

Exercice 1

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$ (avec a et b deux réels tels que $a<b$).

1. Montrer qu'il existe c dans $]a,b[$ tel que :

$$(f(b)-f(a))g'(c) = (g(b)-g(a))f'(c).$$

2. On suppose de plus que $f(a)=f(b)=0$, $f'(a)>0$ et $f'(b)>0$. Montrer qu'il existe trois éléments de $]a;b[^3$, c_1, c_2 et c_3 tels que :

$$c_1 < c_2 < c_3 \text{ et } f(c_2) = f'(c_1) = f'(c_3) = 0.$$

Exercice 2

On définit f la fonction suivante : $f : \begin{cases}]\,0,+\infty\,[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{x-\ln(x)}{2} \end{cases}$ On note (E) l'équation suivante d'inconnue x réel strictement positif : $\ln(x)+x=0$. (E)

1. Montrer que (E) admet une unique solution. Nous noterons α cette solution.
2. Dresser le tableau de variations de f.
3. Montrer alors que, pour tous réels x et y de $\left[\frac{1}{e},1\right]$, on a :

$$|f(x)-f(y)| \leqslant \left(\frac{e-1}{2}\right)|x-y|$$

4. Etablir la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

MPSI **Sujet 3**
Semaine de colle: 13

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Démontrer le théorème de la limite de la dérivée dans le cas spécial où $I = [a, b[$.

Exercice 1

Soient f et g deux fonctions continues sur I, intervalle réel, et dérivables en a (avec $a \in I$). Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \left(\dfrac{f(a+h^2) - f(a+h)}{h} \right)$.
2. $\lim\limits_{x \longrightarrow a} \left(\dfrac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{x-a} \right)$.

Exercice 2

Soit $f : x \mapsto \dfrac{4\tan(x)}{4+\tan^2(x)}$.

1. Etudier les variations de f.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$ a une unique solution. On la note r.
3. On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 3/2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers r.