MPSI **Sujet 1**
Semaine de colle: 15

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Rapport entre α racine de P et divisibilité de P par $X - a$.

Exercice 1

Soit P un polynôme de degré 2023 vérifiant :

$$\forall k \in [\![0, 2023]\!],\ \ P(k) = \frac{k}{k+1}.$$

On cherche à calculer ici la valeur de $P(2024)$. Pour cela, on pose :

$$Q(X) = (X+1) \times P(X) - X.$$

1. Déterminer le degré de Q.
2. Déterminer toutes les racines de Q.
3. Calculer $Q(-1)$.
4. En déduire la factorisation de Q.
5. Calculer $Q(2024)$ puis $P(2024)$.

Exercice 2

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$P_n(X) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{X^k}{k!}.$$

Déduire d'une relation entre P_n' et P_{n-1} que P_n n'a pas de racine multiple et donner le nombre de racines de P_n (qui dépend de la parité de n).

MPSI **Sujet 2** Semaine de colle: 15

Sujet disponible sur: cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Démontrer l'unicité de la division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$ en cas d'existence.

Exercice 1

1. On pose $P(X) = X^{2n+1} - (2n+1)X^{n+1} + (2n+1)X^n - 1$ (avec n un entier supérieur à 3). Montrer que 1 est racine de P et évaluer son ordre de multiplicité.
2. Trouver les racines de $Q(X) = X^3 - 9X^2 + 26X - 24$ et $R(X) = X^3 - 7X^2 + 7X + 15$ sachant qu'ils possèdent une racine commune.

Exercice 2

On définit une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes en posant :

$$T_0(X) = 1, T_1(X) = X, \text{ et } T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X) \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Soit n un entier naturel non nul.

1. Expliciter T_5.
2. Déterminer le degré, le cœfficient dominant et la parité de T_n.
3. Montrer que, pour tout réel θ, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
4. En déduire toutes les racines de T_n et T_n'.

MPSI **Sujet 3**
Semaine de colle: 15

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Degré et produit...

Exercice 1

Soit θ un réel. Pour tout entier naturel n, on pose :

$P_n(X) = X^{n+1}\cos((n-1)\theta) - X^n\cos(n\theta) - X\cos(\theta) + 1$ et $A(X) = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$.

Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$P_n(X) = \cos((n-1)\theta)X^{n-1}A(X) + P_{n-1}(X).$$

et en déduire que P_n est divisible par A et évaluer son quotient.

Exercice 2

Trouver un polynôme P tel que $P(X+1) - P(X) = X^2$ et en déduire la valeur de $\sum_{i=1}^{n} i^2$ (avec n entier naturel non nul). Reproduire cette méthode pour expliciter $\sum_{i=1}^{n} i^3$, $\sum_{i=1}^{n} i^4$...