

Question de cours

Rappeler la définition du rang d'un système linéaire. Exposer la méthode de résolution d'un système échelonné.

Exercice 1

Un enfant dispose de sept crayons de couleurs différentes. Il doit colorier un dessin composé de 5 zones numérotées de 1 à 5.

1. On suppose que l'enfant colorie les 5 zones de 5 couleurs différentes. Déterminer le nombre de façons différentes qu'a l'enfant de colorier le dessin.
2. On suppose maintenant que plusieurs zones peuvent recevoir la même couleur. Répondre à la même question.

Exercice 2

On pose $A = \sum_{k=1}^n k^3$ avec n un entier naturel non nul. On va calculer A de trois façons différentes.

1. A partir de $\sum_{k=1}^n ((k+1)^4 - k^4) \dots$
2. Après avoir calculé $(x(x+1))^2 - (x(x-1))^2$ pour tout réel $x \dots$
3. Après avoir déterminé un polynôme Q tel que, pour tout réel x , on ait $Q(x) - Q(x-1) = x^3$.
4. Proposer une méthode pour déterminer $\sum_{k=1}^n k^4$ et $\sum_{k=1}^n k^5$.

Question de cours

Donner la définition d'un système échelonné et un ou deux exemples.

Exercice 1

Résoudre les systèmes suivants d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$:

$$\begin{cases} 5x + 8y - 7z = 5 \\ 2x + 5y - 8z = 8 \\ 4x + 3y - 9z = 9 \\ 2x + 3y + 5z = 7 \end{cases} \text{ puis } \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ 3x + 2y + z = 1 \end{cases}.$$

Exercice 2

1. Expliciter $\sum_{k=0}^p \binom{n}{k} n^k$ pour tout couple d'entiers naturels (p, n) .
2. Expliciter en particulier $(n+1)^4$ et $(n+1)^5$.
3. En déduire que, pour tout entier naturel n , $\frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$ est un entier.

Question de cours

Énoncer et démontrer la propriété des sommes télescopiques. Application : calculer $\sum_{k=1}^n k k!$.

Exercice 1

On prélève cinq cartes d'un jeu de 32 cartes.

1. Combien y a-t-il de mains différentes (une main désignant un ensemble de 5 cartes distinctes) ?
2. Parmi elles, combien contiennent exactement deux cœurs ?
3. Parmi elles, combien contiennent au moins un roi ?
4. Parmi elles, combien contiennent exactement deux paires ?
5. Parmi elles, combien contiennent un full (i.e. un brellan et une paire) ?

Exercice 2

Résoudre les deux systèmes suivants pour se chauffer :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 3x + y + 2z = 1 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases} \quad \text{puis} \quad \begin{cases} x + 3y - 7z + 2t = 1 \\ 2x + 2y + z + 2t = 0 \\ x - y - 2z + t = -1 \\ x + 7y - 4z + t = 3 \end{cases}$$

puis discuter et résoudre, suivant la valeur du couple de paramètres (a, b) complexe, le système suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$:

$$\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$$