MPSI **Sujet 1** Semaine de colle: 14

Sujet disponible sur: cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Soit $(E,\star)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne associative. Démontrer l'existence et l'unicité de l'élément neutre. Unicité de l'inverse sous réserve d'existence.

Exercice 1

On considère un groupe $(G,\cdot)$. Montrer que l'application $f:\left\{\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \mapsto & x^{-1}\end{array}\right.$ est un isomorphisme de groupes si et seulement si le groupe G est commutatif.

Exercice 2

Soit un groupe $(G,\cdot)$ et deux sous-groupes H et K du groupe G. On note :

$$HK=\{h\cdot k, h\in H, k\in K\}.$$

1. Soit $x\in G$. Montrer que :

$$x\in HK \Longleftrightarrow x^{-1}\in KH.$$

2. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (a) HK est un sous-groupe de G.
   (b) KH est un sous-groupe de G.
   (c) $HK=KH$.

MPSI **Sujet 2** | Sujet disponible sur:
Semaine de colle: 14 | cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Soit f un morphisme de groupes. Montrer le rapport entre $\mathrm{Ker}(f)$ et l'injectivité.

Exercice 1

On considère deux groupes G et G' et une application $\varphi : G \mapsto G'$. On définit l'ensemble :

$$H = \{ (x, \varphi(x)); x \in G \}$$

Montrer l'équivalence :

$$(\varphi \text{ morphisme }) \Longleftrightarrow (H \text{ sous-groupe de } G \times G') \, .$$

Exercice 2

Soit un anneau $(A, +, \times)$ et deux éléments a, b de A. On dit qu'un élément $a \in A$ est nilpotent s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n = 0$.

1. Si (ab) est un élément nilpotent, montrer que $1 - ab$ est inversible et déterminer $(1 - ab)^{-1}$.
2. Si (ab) et (ba) sont nilpotents, exprimer $(1 - ba)^{-1}$ en fonction de $(1 - ab)^{-1}$.
3. On ne suppose plus (ab) ni (ba) nilpotents. Montrer que si $1 - ab$ est inversible, alors $1 - ba$ est également inversible.

MPSI **Sujet 3**
Semaine de colle: 14

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Montrer que $\mathrm{Im}\,(f)$ est un sous-anneau de B avec f un morphisme d'anneaux et $(B,+,\star)$ l'anneau d'arrivée.

Exercice 1

Montrer que $(E,\star)$ est un groupe avec E un ensemble non-vide muni d'une lci $\star$ associative telle que :

$$\forall (a,b)\in E^2,\quad \exists (x,y)\in E^2 \text{ tq: } b=a\star x=y\star a$$

Exercice 2

Soit un anneau $(A,+,\times)$. On dit qu'un élément $a\in A$ est nilpotent s'il existe un entier $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $a^n=0$.

1. Montrer que, si a est nilpotent, alors $1-a$ est inversible et calculer son inverse.
2. Soit un élément $a\in A$. On définit l'application $u:\begin{cases} A & \to & A \\ x & \to & u(x)=ax-xa\end{cases}$.
   Déterminer l'application $u^p=\underbrace{u\circ\ldots\circ u}_{\text{p fois}}$.
3. Montrer que, si a est nilpotent, il existe $p\in\mathbb{N}^*$ tel que u^p soit l'application nulle.