MPSI **Sujet 1**
Semaine de colle: 16

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Démontrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures (resp., inférieures) est une matrice triangulaire supérieure (resp., inférieure).

Exercice 1

Pour tout réel t de $]-1,1[$, on pose :

$$A_t = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que, pour tout (t,t') dans $]-1,1[^2$, il existe s dans $]-1,1[$ tel que $A_s = A_t \times A_{t'}$ et en déduire que A_t est inversible et donner son inverse.

Exercice 2

1. Soit θ un réel et soit $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. Déterminer A^k pour tout entier naturel k.
2. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par :

$$x_0 = 1, y_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} & = \cos(\theta)x_n - \sin(\theta)y_n \\ y_{n+1} & = \sin(\theta)x_n + \cos(\theta)y_n \end{cases}$$

Expliciter x_n et y_n pour tout entier naturel n.

MPSI **Sujet 2**
Semaine de colle: 16

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Démontrer que le produit matriciel est associatif (lorsqu'il est défini).

Exercice 1

1. Soit A la matrice d'ordre n (n entier supérieur à 2) remplie de 1. Calculer A^k pour tout entier naturel k et en déduire que A n'est pas inversible.
2. Soit C la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer C^k pour tout entier naturel k.

Exercice 2

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1/2 \\ -2 & 2 & 1/2 \\ -2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. On pose $\Delta = P^{-1}AP$. Expliciter Δ.
3. Exprimer A en fonction de P et Δ.
4. En déduire A^n avec n entier naturel.

MPSI **Sujet 3** Semaine de colle: 16

Sujet disponible sur: cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Démontrer que la matrice identité est l'élément neutre pour le produit.

Exercice 1

Soit $C = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -10 \\ 2 & -5 & 10 \\ 2 & -6 & 11 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $C^2 - 4C$ et en déduire que C est inversible.
2. Montrer que pour tout entier naturel k , il existe deux réels a_k et b_k tels que :

$$C^k = a_k C + b_k I_3$$

Exercice 2

On pose $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 5 \\ -1 & 3 & -2 \\ -6 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on notera I_n la matrice unité de taille n.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $A^p = 0$ pour un certain entier naturel p. Montrer que $I_n - A$ est inversible, d'inverse $I_n + A + A^2 + \cdots + A^{p-1}$, c'est-à-dire : $(I_n - A)^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{p-1} A^k$.
2. En déduire que B est inversible et calculer B^{-1}.
3. Utiliser une autre méthode pour montrer que B est inversible et pour calculer B^{-1}.
4. Calculer B^n pour tout entier naturel n.
5. Écrire une fonction Python prenant en entrée une matrice carrée A et un entier naturel non nul p. Cette fonction devra calculer et donner en sortie la somme $I_n + A + A^2 + \cdots + A^{p-1}$.