

**Question de cours**

Donner la définition, des exemples et l'intérêt d'un sous-espace vectoriel.

**Exercice 1**

Soit  $f : x \mapsto \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$ . Montrer que l'on peut prolonger  $f$  en une fonction dérivable en 0 et préciser la position de la tangente en 0 vis-à-vis de sa tangente.

**Exercice 2**

1. Montrer que, pour tout réel positif  $x$ , on a :  $\exp(x) \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$ .
2. Montrer que, pour tout réel  $x$ , on a :  $\exp(x) \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ .

**Question de cours**

Sous-espaces vectoriels engendrés : définition ? Que savez-vous dessus ?

**Exercice 1**

Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin(x - \sin(x))}{\sqrt{1+x^3} - 1} \right)$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$ .

**Exercice 2**

Mener une étude complète (notamment asymptotes et position par rapport à l'asymptote) et représenter graphiquement la fonction suivante :

$$g : x \mapsto x \exp\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

**Question de cours**

Donner le développement limité de  $\exp$ ,  $\sin$  et  $x \mapsto \ln(1+x)$ .

**Exercice 1**

Les ensembles ci-dessous sont-ils des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$  ?

$$A = \{ (2a + 3b, a, a - b), (a, b) \in \mathbb{R}^2 \}, B = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } |x| + y = z \}$$

$$C = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } xy = 0 \}, D = \{ (2z + 3y, x), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \}.$$

**Exercice 2**

Pour  $x$  réel, on pose  $f(x) = \ln(1 + e^{2x} - e^x)$ .

1. Montrer que  $f$  est bien définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
2. Établir :  $f(x) = x + x^2 + o_0(x^3)$ .
3. En déduire l'équation de la tangente à la courbe de  $f$  au point d'abscisse 0. Étudier la position de la courbe de  $f$  par rapport à sa tangente au voisinage de ce point.
4. Montrer que la droite d'équation  $y = 2x$  est asymptote à la courbe de  $f$  en  $+\infty$  et étudier la position de la courbe de  $f$  par rapport à cette asymptote pour les abscisses positives. *Indications sur la démarche* : Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - 2x) = 0$  et étudier le signe de  $f(x) - 2x$  pour tout réel  $x$  positif.
- 5.(a) Justifier que  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , que  $f' > 0$  sur  $]-\ln(2), +\infty[$  et que  $f$  réalise une bijection de  $]-\ln(2), +\infty[$  sur un intervalle ouvert  $J$  que l'on précisera (on remarquera en particulier que  $0 \in J$ ). On admet dans ce cas que la bijection réciproque  $f^{-1} : J \rightarrow ]-\ln(2), +\infty[$  est encore de classe  $C^\infty$ . En particulier,  $f^{-1}$  est de classe  $C^3$  sur  $J$  donc  $f^{-1}$  admet un développement limité en 0 d'ordre 3 (conséquence du théorème de Taylor-Young) :  $f^{-1}(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + o_0(x^3)$  où  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ .
- (b) Pour  $x \in \mathbb{R}_+$ , calculer très simplement  $f^{-1}(f(x))$ . En déduire le développement limité d'ordre 3 en 0 de  $f^{-1}(f(x))$ .
- (c) Sachant que  $f^{-1}(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + o_0(x^3)$ , donner une autre expression du développement limité de  $f^{-1}(f(x))$  en fonction de  $a, b, c$  et  $d$ .
- (d) Conclure que  $f^{-1}(x) = x - x^2 + 2x^3 + o_0(x^3)$ .