

Question de cours

Développement limité en 0 d'ordre 3 de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ et de \exp . Exposer la méthode pour obtenir les DL en a et en l'infini.

Exercice 1

On pose $f : x \mapsto \ln(|2x + 1|) + \ln(|x + 3|)$.

1. Déterminer le domaine de définition \mathcal{D}_f de f .
2. Résoudre alors l'inéquation suivante $\ln(|2x + 1|) + \ln(|x + 3|) < \ln(3)$ d'inconnue $x \in \mathcal{D}_f$.

Exercice 2

1. Montrer que, pour tout réel positif x , on a : $\exp(x) \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$.
2. Montrer que, pour tout réel x , on a : $\exp(x) \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$.

Question de cours

Définition et propriétés diverses de la fonction exp.

Exercice 1

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x - \sin(x))}{\sqrt{1+x^3} - 1} \right)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$.

Exercice 2

Démontrer ces égalités :

$$2 \arctan \left(\frac{1}{5} \right) = \arctan \left(\frac{5}{12} \right) \quad \text{et} \quad 4 \arctan \left(\frac{1}{5} \right) = \arctan \left(\frac{120}{119} \right)$$

et en déduire que $\frac{\pi}{4}$ est $4 \arctan \left(\frac{1}{5} \right) - \arctan \left(\frac{1}{239} \right)$

Question de cours

Définition et propriétés diverses de la fonction \ln .

Exercice 1

Résoudre l'équation suivante d'inconnue x réel : $\exp(x) + \exp(1-x) = e + 1$ puis (aucun rapport!) expliciter $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ avec x un réel non nul.

Exercice 2

Pour x réel, on pose $f(x) = \ln(1 + e^{2x} - e^x)$.

1. Montrer que f est bien définie et dérivable sur \mathbb{R} .
2. Établir : $f(x) = x + x^2 + o_0(x^3)$.
3. En déduire l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0. Étudier la position de la courbe de f par rapport à sa tangente au voisinage de ce point.
4. Montrer que la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$ et étudier la position de la courbe de f par rapport à cette asymptote pour les abscisses positives. *Indications sur la démarche* : Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - 2x) = 0$ et étudier le signe de $f(x) - 2x$ pour tout réel x positif.
- 5.(a) Justifier que f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} , que $f' > 0$ sur $]-\ln(2), +\infty[$ et que f réalise une bijection de $]-\ln(2), +\infty[$ sur un intervalle ouvert J que l'on précisera (on remarquera en particulier que $0 \in J$). On admet dans ce cas que la bijection réciproque $f^{-1} : J \rightarrow]-\ln(2), +\infty[$ est encore de classe C^∞ . En particulier, f^{-1} est de classe C^3 sur J donc f^{-1} admet un développement limité en 0 d'ordre 3 (conséquence du théorème de Taylor-Young) : $f^{-1}(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + o_0(x^3)$ où $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.
- (b) Pour $x \in \mathbb{R}_+$, calculer très simplement $f^{-1}(f(x))$. En déduire le développement limité d'ordre 3 en 0 de $f^{-1}(f(x))$.
- (c) Sachant que $f^{-1}(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + o_0(x^3)$, donner une autre expression du développement limité de $f^{-1}(f(x))$ en fonction de a, b, c et d .
- (d) Conclure que $f^{-1}(x) = x - x^2 + 2x^3 + o_0(x^3)$.