BCPST1 **Sujet 1**
Semaine de colle: 21

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Définition de la transposée d'une matrice. Donner les règles de calcul notables

Exercice 1

Pour tout réel t de $]-1,1[$, on pose :

$$A_t = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Soit (t, t') dans $]-1,1[^2$. Calculer $A_t \times A_{t'}$.
2. Soit (t, t') dans $]-1,1[^2$. Montrer qu'il existe s dans $]-1,1[$ tel que $A_s = A_t \times A_{t'}$.
3. En déduire que A_t est inversible et donner son inverse.

Exercice 2

Démontrer ces égalités :

$$2\arctan\left(\frac{1}{5}\right) = \arctan\left(\frac{5}{12}\right) \quad \text{et} \quad 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) = \arctan\left(\frac{120}{119}\right)$$

et en déduire que $\frac{\pi}{4}$ est $4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$

BCPST1 **Sujet 2**
Semaine de colle: 21

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Définition de la somme et du produit de deux matrices.

Exercice 1

1. Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^k pour tout entier naturel k et en déduire que A n'est pas inversible.
2. Soit B la matrice d'ordre n (n entier naturel non nul) remplie de 1. Calculer B^k pour tout entier naturel k.
3. Soit C la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer C^k pour tout entier naturel k.

Exercice 2

Résoudre l'équation suivante d'inconnue x réel : $\exp(x) + \exp(1-x) = e+1$ puis (aucun rapport!) expliciter $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ avec x un réel non nul.

BCPST1 **Sujet 3** | Sujet disponible sur:
Semaine de colle: 21 | cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Matrices inversibles : définition, notations et caractérisation, propriétés de base. Recherche pratique de l'inverse et règles de calcul.

Exercice 1

Soit $C = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -10 \\ 2 & -5 & 10 \\ 2 & -6 & 11 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $C^2 - 4C$ et en déduire que C est inversible.
2. Montrer que pour tout entier naturel k , il existe deux réels a_k et b_k tels que :

$$C^k = a_k C + b_k I_3$$

Exercice 2

On pose $f : x \mapsto \ln(|2x+1|) + \ln(|x+3|)$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Résoudre alors l'inéquation suivante $\ln(|2x+1|) + \ln(|x+3|) < \ln(3)$ d'inconnue $x \in \mathcal{D}_f$.