BCPST1 **Sujet 1** Sujet disponible sur:
Semaine de colle: 23 cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Définition et caractérisation de la borne supérieure. Évaluer celle de $]-\infty, 1[$.

Exercice 1

Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

1. $u_{1,n} = \dfrac{\cos(n)}{n}$
2. $u_{2,n} = \exp\left(1 - \dfrac{(-1)^n}{n}\right)$
3. $u_{3,n} = n \sin\left(\dfrac{1}{n^2+n^3}\right)$
4. $u_{4,n} = \dfrac{\lfloor xn^2 \rfloor}{n}$

Pour tout $i \in [\![1, 4]\!]$, étudier la convergence de $(u_{i,n})_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites définies par : $u_0 = 1, v_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $\dfrac{2}{u_{n+1}} = \dfrac{1}{u_n} + \dfrac{1}{v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$. Soit n un entier naturel.

1. Montrer que $u_n > 0$, $v_n > 0$ et $u_n \leqslant v_n$.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et qu'elles convergent vers la même limite.
3. Étudier la suite $(u_n \times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et déterminer la valeur de la limite commune de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

BCPST1 **Sujet 2**
Semaine de colle: 23

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Résultats sur les limites des suites monotones. Démontrer qu'une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Exercice 1

Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

1. $u_{1,n} = \sqrt{n(n+1)} - n$
2. $u_{2,n} = \dfrac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}$
3. $u_{3,n} = \ln(n+1) - \ln(n)$
4. $u_{4,n} = \dfrac{\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)}{\sum_{k=1}^{n} k}$

Pour tout $i \in [\![1, 4]\!]$, étudier la convergence de $(u_{i,n})_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

Exercice 2

On définit les suites $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ par : $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} = (H_n - \ln(n+1))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} = (H_n - \ln(n))_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

1. Montrer que, pour tout entier n non nul, on a : $H_{2n} - H_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.
2. En déduire la limite de la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$.
3. Montrer que, pour tout entier réel x strictement supérieur à -1, on a : $\ln(1+x) \leqslant x$.
4. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, on a :
$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}.$$
5. Montrer que, pour tout entier n non nul, on a :
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \text{ et } v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$
6. Déduire de la question précédente la limite de la suite $(H_{2n} - H_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$.

BCPST1 **Sujet 3** Sujet disponible sur:
Semaine de colle: 23 cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Définition et propriétés des suites adjacentes. Démonstration du théorème.

Exercice 1

Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

1. $u_{1,n} = \sqrt{n^2+3} - \sqrt{n^2+1}$
2. $u_{2,n} = n\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)$
3. $u_{3,n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2}$
4. $u_{4,n} = \dfrac{\lfloor xn \rfloor}{n}$

Pour tout $i \in [\![1,4]\!]$, étudier la convergence de $(u_{i,n})_{n\in\mathbb{N}^\star}$

Exercice 2

Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{2n^2}.$$

On note l la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$. Soit ε un réel non nul. On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définies par :

$$\begin{cases} a_1 &= l-1 \\ b_1 &= l-1+\varepsilon \end{cases} \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}^\star, \begin{cases} a_{n+1} &= \dfrac{n+1}{n}a_n - \dfrac{1}{(n+1)^2} \\ b_{n+1} &= \dfrac{n+1}{n}b_n - \dfrac{1}{(n+1)^2} \end{cases}.$$

1. Démontrer que l est bien définie et justifier que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $0 \leqslant l - u_n \leqslant \dfrac{1}{2n^2}$.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a :
$$a_n = n(l-u_n) \quad \text{et} \quad b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{n+1}{n} \times (b_n - a_n).$$
3. En déduire les limites des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$. et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.