MPSI **Sujet 1** — Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 21 — cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n alors toute famille libre de cardinal n est une base et toute famille génératrice de cardinal n est une base.

Exercice 1

On pose :

$$A = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tel que } P(4) = 0\} \quad \text{et} \quad B = \{Q \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tel que } Q'(4) = 0\}.$$

1. Montrer que A et B sont des espaces vectoriels.
2. Déterminer des familles génératrices pour chacune de A, B et $A \cap B$.
3. Montrer que $\mathbb{R}_3[X] = A + B$.

Exercice 2

Trouver la dimension de A et B avec $A = \left\{ \begin{pmatrix} a+2b & a+2b \\ b & a+3b+c \end{pmatrix}, (a,b,c) \in \mathbb{C}^3 \right\}$ et B le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions f continues sur $[0,2]$ telles que f restreinte à $[0,1]$ soit une fonction affine et f restreinte à $[1,2]$ soit aussi une fonction affine.

MPSI **Sujet 2**
Semaine de colle: 21

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Soit $(x_1, \cdots, x_p)$ une famille finie de E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n alors $\operatorname{rang}((x_1, \cdots, x_p)) \leqslant p$ et on a : $\operatorname{rang}((x_1, \cdots, x_p)) = p$ si et seulement si $(x_1, \cdots, x_p)$ est libre.

Exercice 1

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère l'ensemble $F = \text{ Vect } \left((0,1,0,0), (-1,0,2,1)\right)$ et :

$$G = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } x+z=0 \text{ et } y+x=z \right\}.$$

On appelle $\mathcal{B}$ la famille $\left((0,1,0,0), (-1,0,2,1), (-1,2,1,0), (0,0,0,1)\right)$.

1. Montrer que G est un espace vectoriel.
2. Déterminer les dimensions de F et G.
3. Expliciter $F \cap G$.
4. Montrer que $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$ et en déduire que, si u est un élément de $\mathbb{R}^4$, alors il existe un unique couple (g,h) de $F \times G$ tel que $u = g + h$.

Exercice 2

On considère l'ensemble $U = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } c+d = a+b+2d = 0\}$. Pour tout réel λ, on définit les vecteurs suivants :

$e_1 = (1,-1,-1,0), e_{2,\lambda} = (1,\lambda,\lambda,-1), e_{3,\lambda} = (2,-1+\lambda,-2,-\lambda)$ et $e_{4,\lambda} = (1+\lambda,-1-\lambda,0,1)$.

Pour tout réel λ, on appelle V_λ l'espace engendré par e_1, $e_{2,\lambda}$, $e_{3,\lambda}$ et $e_{4,\lambda}$.

1. Montrer que U est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et déterminer sa dimension.
2. Déterminer la dimension de V_λ et une base de V_λ pour tout réel λ.
3. Montrer que $V_{-1} = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \text{ tels que } a+b = a+c = 0\}$.
4. Soit λ un réel. Déterminer une base de $U \cap V_\lambda$.

.

MPSI **Sujet 3** Semaine de colle: 21

Sujet disponible sur: cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E, alors F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$.

Exercice 1

1. Montrer que $((1,1,2,0),(0,1,1,1),(2,1,3,2))$ est une famille libre puis compléter cette famille en une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Montrer que $((1,1,2),(0,1,1),(2,1,3),(5,6,10))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ puis extraire de cette famille une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2

Pour tout entier naturel non nul k, on pose :

$$\binom{X}{k} = \frac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}.$$

On définit aussi $\binom{X}{0} = 1$. Soit n un entier naturel.

1. Montrer que la famille $(\binom{X}{0}, \cdots, \binom{X}{n})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$. Décomposez P sur la base de la question précédente.
3. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout k de $[\![0,n]\!]$, $P(k)$ est un entier. Montrer que pour tout entier a, $P(a)$ est un entier.