MPSI **Sujet 1**
Semaine de colle: 22

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Si g est de classe ? ? ? alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\int_a^b \sin(nt)g(t)dt\right) = 0$.

Exercice 1

Les deux question suivantes sont totalement indépendantes!

1. Montrer que les applications suivantes sont linéaires :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto (x+y,y,0) \end{cases} \text{ et } g : \begin{cases} \mathbb{R}_1[X] & \to \mathbb{R}^3 \\ x+yX & \mapsto (x+y,y,0) \end{cases}.$$

2. Calculer $\displaystyle\int_1^e \frac{2t\ln(t)}{(1+t^2)^2}dt$, $\displaystyle\int_1^2 \frac{\arctan(t)}{t^2}dt$ et $\displaystyle\int_0^1 \arctan(\sqrt{t})dt$.

Exercice 2

1. Soit k un entier naturel non nul. Montrer que :

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}dt \leqslant \frac{1}{k}.$$

2. On pose pour tout entier naturel non nul n, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que :

$$S_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n).$$

MPSI **Sujet 2**
Semaine de colle: 22

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Parité, périodicité et intégration.

Exercice 1

Les deux question suivantes sont totalement indépendantes!

1. Montrer que les applications suivantes sont linéaires :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto (x+y, y, z-y) \end{cases} \quad \text{et } g : \begin{cases} \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) & \to \mathbb{R} \\ f & \mapsto \displaystyle\int_0^5 f(t)dt \end{cases}.$$

2. Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sin(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}dt$, $\displaystyle\int_e^3 \frac{dt}{t\ln(t)}$, et $\displaystyle\int_1^e \frac{\sqrt{1+\ln(t)}}{t}dt$.

Exercice 2

Pour tout tout entier naturel n, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

2. Quelle est la nature de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

MPSI **Sujet 3**
Semaine de colle: 22

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Si f est un isomorphisme de E sur F alors f^{-1}....

Exercice 1

Les deux question suivantes sont totalement indépendantes!

1. Montrer que les applications suivantes sont linéaires :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto x+y \end{cases} \text{ et } g : \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to \mathbb{R}^2 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto (u_1, u_4) \end{cases}.$$

2. Calculer $\displaystyle\int_1^2 2^t dt$, $\displaystyle\int_1^e \frac{\sqrt{\ln(t)}}{t} dt$ et enfin $\displaystyle\int_1^{10} \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx$.

Exercice 2

Démontrer que : $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln(\cos(x))dx = \int_0^{\pi/4} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) dx$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan(x))dx$.