MPSI **Sujet 1** Semaine de colle: 24

Sujet disponible sur: cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Montrer que le noyau et l'image sont des sous-ev

Exercice 1

1. Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires :

   (a) $f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto (x^2, 0) \end{cases}$

   (b) $f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto (x+1, y) \end{cases}$

   (c) $f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto xy+z \end{cases}$

   (d) $f_4 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto (x+y, y, 0) \end{cases}$

   (e) $f_5 : \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to \mathbb{R}^2 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto (u_1, u_4) \end{cases}$

   (f) $f_6 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}[X] \\ (x,y) & \mapsto xX - y + x \end{cases}$

   (g) $f_7 : \begin{cases} \mathbb{R}_9[X] & \to \mathbb{R}_9[X] \\ P & \mapsto P - P' \end{cases}$

   (h) $f_8 : \begin{cases} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) & \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto f'' - f \end{cases}$

2. Expliciter le noyau des applications linéaires de cet exercice.
3. Y-a-t-il ds projecteurs/symétries dans cet exercice ?

Exercice 2

Soit n entier naturel non nul et a un réel non nul. On pose pour tout P élément de $\mathbb{R}_n[X]$:

$$f(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k P^{(k)}.$$

Vérifier que f est bien définie et que f est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

MPSI **Sujet 2** | Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 24 | cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Soient E et F des ev de dimension finie. Montrer que E et F sont isomorphes si et seulement si....

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel et (e_1, e_2, e_3) une base de E.

1. Après avoir prouvé son existence, déterminer le noyau et l'image de l' endomorphisme f de E telle que :
$$f(e_1) = e_1 + e_2 + e_3$$
$$f(e_2) = e_2 + e_3$$
$$f(e_3) = 2e_1$$
2. Après avoir prouvé son existence, déterminer le noyau et l'image de l' endomorphisme f de $\mathbb{R}_2[X]$ telle que :
$$g(1) = 1 + X + X^2$$
$$g(X) = X + X^2$$
$$g(X^2) = 2$$
3. Expliciter, lorsque cela a un sens, une base de $\mathrm{Ker}(f - a\mathrm{Id}_E)$ avec a un réel.

Exercice 2

Soit f un endomorphisme de E un espace vectoriel de dimension N avec N un entier naturel non nul. On dit qu'un endomorphisme g de E est nilpotent lorsqu'il existe un entier naturel n tel que $g^n = 0$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $\mathrm{Ker}\,(f^n) \subset \mathrm{Ker}\,(f^{n+1})$.
2. On suppose, uniquement dans cette question, que n est un entier naturel tel que $\mathrm{Ker}\,(f^n)$ et $\mathrm{Ker}\,(f^{n+1})$ soient égaux. Montrer que, pour tout entier m supérieur à n, on a alors :
$$\mathrm{Ker}\,(f^m) = \mathrm{Ker}\,(f^n)\,.$$
3. Montrer qu'il existe un entier naturel m tel que la suite $(\dim\ (\mathrm{Ker}(f^n)))_{n\geqslant n_0}$ soit constante et prouver que, si n_0 est le plus petit entier naturel tel que cette suite soit constante alors $n_0 \leqslant N$.
4. En déduire que, si f est nilpotent, alors $f^N = 0$.

MPSI **Sujet 3**
Semaine de colle: 24

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Soient E et F des ev de dimension finie et de même dimension et f une application linéaire de E dans F. Montrer alors que f est injective si et seulement si....

Exercice 1

1. Après avoir prouvé son existence, expliciter l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ telle que :
$$f(3,2) = (1,0) \text{ et } f(0,4) = (1,1).$$
Expliciter son noyau et son image.
2. Après avoir prouvé son existence, expliciter l' application linéaire f de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que :
$$f(1) = (0,0,1), f(X) = (1,2,3) \text{ et } f(1+X+X^2) = (0,1,0).$$
Expliciter son noyau et son image.

Exercice 2

Les deux questions sont indépendantes!

1. Soient p et q deux projecteurs. Montrer l'équivalence suivante :
$$p+q \text{ est un projecteur si et seulement si } p \circ q = q \circ p = 0.$$
2. Soit E un espace vectoriel de dimension n (n entier naturel non nul) et f un endomorphisme de E tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq= 0$. Montrer qu'il existe un vecteur a de E tel que $(a, f(a), f^2(a), .., f^{n-1}(a))$ soit une base de E. Montrer que $id_E - f$ est un automorphisme et évaluer $(id_E - f)^{-1}$.