MPSI **Sujet 1**
Semaine de colle: 25

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Démontrer que la probabilité conditionnelle est une probabilité sur Ω.

Exercice 1

On prend un dé au hasard parmi un lot de 100 dés dont on sait que 25 sont pipés. Pour un dé pipé, la probabilité d'obtenir un 6 est 0,5.

1. On lance le dé, on obtient 6. Quelle est la probabilité pour que ce dé soit pipé ?
2. On relance le dé et on obtient un second 6. Quelle est la probabilité pour que ce dé soit pipé ?

Exercice 2

On dispose de trois urnes A, B et C contenant chacune 6 boules blanches ou noires. L'urne A contient 4 boules blanches et 2 boules noires. L'urne B contient 3 boules blanches et 3 boules noires. L'urne C contient 2 boules blanches et 4 boules noires.

1. *Première expérience* : On choisit une urne au hasard et on tire successivement, **sans remise**, deux boules de cette urne.
   (a) Calculer la probabilité d'obtenir deux boules noires.
   (b) Sachant qu'on a obtenu deux boules noires, quelle est la probabilité d'avoir choisi l'urne C?
2. *Deuxième expérience* : avec les conditions initiales décrites par l'énoncé, On choisit une urne au hasard et on tire successivement, **avec remise**, n boules de cette urne.
   (a) Calculer la probabilité d'obtenir n boules noires.
   (b) Sachant qu'on a obtenu n boules noires, quelle est la probabilité d'avoir choisi l'urne C? Quelle est la limite de cette probabilité lorsque n tend vers $+\infty$? Interpréter.
   (c) Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note A_k l'évènement : "La première boule noire a été tirée au k-ième tirage". Calculer $P(A_k)$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.
   (d) Déterminer la limite de $P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)$ quand n tend vers $+\infty$ et interpréter le résultat obtenu.

MPSI **Sujet 2**
Semaine de colle: 25

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Formule des probabilités totales.

Exercice 1

On considère une classe de 50 élèves. Pour chaque élève, on suppose que chaque jour de l'année a la même probabilité d'être le jour de son anniversaire et on ne prend pas en compte les années bissextiles.

1. Calculer la probabilité que deux élèves au moins de cette classe aient leur anniversaire le même jour.
2. Calculer la probabilité qu'au moins un élève soit né le même jour que le formidable professeur de mathématiques des MPSI (qui est né le ? ?/ ? ?/197 ?).

Exercice 2

Trois urnes A, B et C contiennent respectivement : 3 boules blanches et 2 noires, 8 boules blanches et 4 noires et enfin 1 boule blanche et 5 noires.

1. On choisit une urne au hasard d'où l'on extrait une boule au hasard. Déterminer la probabilité que cette boule soit blanche.
2. On choisit une urne au hasard d'où l'on extrait deux boules au hasard avec remise. Les deux boules sont de la même couleur. Déterminer la probabilité qu'elles soient issues de l'urne A.
3. Reprenez la question précédente avec un tirage sans remise.

MPSI **Sujet 3** | Sujet disponible sur:
Semaine de colle: 25 | cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Démontrer que l'équivalence des matrices est une relation d'équivalence.

Exercice 1

On se place dans un pays où le tiers de la population a été vacciné contre le Covid-19. On constate que sur quinze malades du Covid, il y a deux personnes vaccinées. Pour tester l'efficacité du vaccin, on va comparer la probabilité d'être malade à la probabilité d'être malade sachant que l'on a été vacciné et on dit que le vaccin est efficace si $P_V(M) \leqslant P(M)$ en notant M l'événement :" Une personne est victime de la maladie " et V :" Une personne a été vaccinée ".

1. Le vaccin est-il efficace ?
2. On suppose désormais que sur cent personnes vaccinées, huit sont malades. Quelle est la proportion de malades dans la population ?
3. Chercher la probabilité de tomber malade pour une personne non vaccinée.

Exercice 2

Soit C le cercle trigonométrique et soient les points A(1), G (i), B(-1) et P(-i). Amadéo joue en déplaçant un pion sur C dans le sens trigonométrique de la façon suivante : Le jeton se trouve initialement en A. Il lance un dé équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et il déplace le pion d'un nombre de quart de tours égal au nombre indiqué par le dé. Par exemple si le dé marque 3, le pion est placé en P. La partie se déroule en 100 lancers maximum : Tant que le pion est en A ou B, on le déplace selon la règle ci-dessus. La première fois que le pion est placé en P, Amadéo a perdu et le jeu s'arrête. La première fois que le pion est placé en G, Amadéo a gagné et le jeu s'arrête. Si après 100 lancers, le jeton se trouve en A ou en B, la partie est déclarée " partie nulle ". Soit a_n la probabilité pour que le pion soit en A après le $n^{ième}$ lancer du dé. Soit b_n la probabilité pour que le pion soit en B après le $n^{ième}$ lancer du dé. On pose $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$.

1. Calculer a_1 et b_1.
2. Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
3. Déterminer a_n et b_n en fonction de n.
4. Déterminer la probabilité que Amadéo gagne. Déterminer la probabilité que la partie soit nulle.
5. Déterminer la probabilité que Amadéo perde.