MPSI **Sujet 1** Sujet disponible sur:
Semaine de colle: 1 cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Série géométrique : condition de convergence ? Valeur de la somme ?

Exercice 1

Soit a un réel. Montrer la convergence des séries suivantes et donner la valeur de leur somme :

$$\sum \frac{a^{2n+1}}{(2n)!}, \sum \frac{\sin(na)a^n}{n!} \quad \text{et} \quad \sum \arctan\left(\frac{1}{n+n^2+1}\right)$$

Exercice 2

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$.

1.(a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant 2$.
(b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis en déduire les variations de la suite (u_n).
(c) Établir que, pour tout $x > -1$, on a : $\ln(1+x) \leqslant x$.
(d) En déduire, pour tout entier naturel n, un majorant de $\ln(u_n)$.

2. Montrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ, élément de $[2, e^2]$.

3. On se propose de déterminer la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.
(a) Justifier que la suite $(\ln(u_n))$ converge et que l'on a : $\ln(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$.
(b) Montrer que, pour tout $n \in$, on a : $\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$.
(c) Vérifier que : $\forall n \in,\ 0 \leqslant \ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \leqslant \frac{1}{2^n}$.
(d) En déduire que : $\forall n \in,\ 0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \ell(1 - e^{-\frac{1}{2^n}})$.
(e) Justifier que, pour tout réel x, on a $1 - e^{-x} \leqslant x$. En déduire que :

$$\forall n \in,\ 0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \frac{\ell}{2^n}.$$

Conclure quant à la nature de $\sum(\ell - u_n)$.

MPSI **Sujet 2**
Semaine de colle: 1

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Critère des séries alternées

Exercice 1

Soient a et b deux réels. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$u_0 = a,\ u_1 = b \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{u_n}{4}.$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b assurant la convergence de la série $\displaystyle\sum_n u_n$ et donner la valeur de sa somme.
2. Soit p un entier naturel. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b assurant la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant p} u_n$ et donner la valeur de sa somme.

Exercice 2

On considère la fonction f suivante :

$$f : \begin{cases} [2; +\infty[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)} \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout entier n supérieur à 2, on a :

$$\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{t\ln(t)}\, dt \leqslant \frac{1}{n\ln(n)}.$$

2. En déduire la nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln(n)}$ et un équivalent de la suite de ses sommes partielles.

MPSI **Sujet 3**
Semaine de colle: 1

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Montrer que la convergence absolue donne la convergence.

Exercice 1

1. Montrer que la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente et en déduire que la convergence de $P = \sum \frac{1}{(2n)^2}$, $I = \sum \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $A = \sum \frac{(-1)^n}{n^2}$.
2. En admettant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer la valeur de P, I et A.

Exercice 2

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$ et $v_n = \sum_{k=n}^{2n} \arctan^2\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge.
2. Montrer que pour tout réel positif x, on a $\arctan(x) \leqslant x$ et en déduire que $u_n \geqslant v_n$ pour tout entier naturel non nul n.
3. A l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que pour tout réel x supérieur à 1, on a : $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \geqslant \frac{\sqrt{x}}{x+1}$.
4. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $u_n - v_n \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n} \frac{2k+1}{(k+1)^2}$ puis que, pour tout entier naturel non nul n, on a :
$$0 \leqslant u_n - v_n \leqslant \frac{4}{n}$$
5. En déduire la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.