BCPST1 **Sujet 1** Sujet disponible sur:
Semaine de colle: 24 cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Donner la définition de $\lim_{x \to +\infty} (f(x)) = L$ avec L réel. En déduire $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 1

Soit f la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin(x^2)}{\sqrt{x+4}-2}$. f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Exercice 2

Soit $f_n : x \mapsto x^n + x - 1$ avec n un entier naturel non nul.

1. Montrer que f_n s'annule une seule fois sur $[0, 1]$. On note a_n ce réel.
2. Trouver le signe de $f_{n+1}(a_n)$ et en déduire les variations de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Trouver la limite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} (nu_n) = +\infty$.

BCPST1 **Sujet 2**
Semaine de colle: 24

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Énoncer et démontrer le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 1

Établir que l' équation suivante, d'inconnue x réel, admet au moins une solution :

$$x^{17} + x^3 \sin(x) = 1.$$

Exercice 2

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$. On suppose que f vérifie les deux propriétés suivantes :

$$\lim_{x \longrightarrow 0} (f(x)) \text{ existe et } \forall x \in \mathbb{R}, f(2x) + f(x) = 0.$$

1. Calculer $f(0)$.
2. Soit a un réel. Pour tout entier naturel n, on pose $x_n = \dfrac{a}{2^n}$. Étudier la convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis celle de $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$.
3. En déduire que f est la fonction nulle.

BCPST1 **Sujet 3** Semaine de colle: 24

Sujet disponible sur: cahier-de-prepa.fr/dalzon2/docs?colle

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Expliquer le principe de prolongement d'une fonction par continuité. L'illustrer sur un exemple simple.

Exercice 1

Choisir a et b de façons à ce que la fonction f suivante soit continue :

$$f : x \mapsto \begin{cases} b\cos(x) + a\sin(x) & \text{si } x \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[\\ 5 & \text{si } x = 0 \\ ax^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 2

Soit f une fonction numérique définie et continue sur $[0, 1]$. On suppose que $f(0) = f(1)$. Soit p un entier naturel non nul. Montrer qu'il existe x un élément de $\left[0, 1 - \frac{1}{p}\right]$ tel que $f\left(x + \frac{1}{p}\right) = f(x)$.