Exercice 3

Les préférences d'un consommateur quand à la consommation d'un panier composé d'un bien A et d'un bien B sont formalisées par la fonction d'utilité suivante : $U(a,b)=a^{\alpha}.b^{\beta}$ où a représente la quantité consommée de A, b celle de B et où α et β sont des entiers strictement positifs.

On notera P_A le prix unitaire du bien A et P_B celui du bien B. On supposera que le consommateur alloue un revenu noté R à la consommation de ce panier.

1. Montrer que les biens A et B sont imparfaitement substituables pour ce consommateur.

2 conditions doivent être vérifiées

1. **Des paniers de biens différents permettent d'atteindre un même niveau d'utilité** : On peut constater que tout panier de bien qui vérifie $b = \frac{1}{a^{\alpha/\beta}}$ permet au consommateur d'atteindre un niveau d'utilité égal à 1.

2. **Le niveau d'utilité du consommateur est nul si la quantité consommée de A ou la quantité consommé de B est nulle**, ce qui est bien le cas ici $U(0,b)=0 \; et \; U(a,0)=0$

2. Déterminer les fonctions de demande de ce consommateur

Le consommateur ne choisit que les paniers de biens qui maximisent son utilité et donc qui vérifient : $UmA/P_A = UmB/P_B$ Cela signifie ici que $\alpha a^{\alpha-1} b^{\beta}/P_A = \beta a^{\alpha} b^{\beta-1}/P_B$ ce qui se simplifie en $P_B/P_A = \beta a/\alpha b$ d'où on déduit que :

$a = \frac{P_B}{P_A}\frac{\alpha}{\beta} b$, une relation que l'on utilise dans la contrainte budgétaire pour trouver la fonction de demande de bien B : $R = P_A a + P_B b = P_A \frac{P_B}{P_A}\frac{\alpha}{\beta} b + P_B b = b P_B (\frac{\alpha}{\beta} + 1)$ d'où on déduit que la fonction de demande de bien B est $B^d(P_A, P_B, R) = \frac{R}{P_B(\frac{\alpha}{\beta}+1)} = B^d(P_B, R)$ car on constate que la demande de bien B de ce consommateur ne dépend pas du prix unitaire du bien A	$b = \frac{P_A}{P_B}\frac{\beta}{\alpha} a$, une relation que l'on utilise dans la contrainte budgétaire pour trouver la fonction de demande de bien B : $R = P_A a + P_B b = P_A a + P_B \frac{P_A}{P_B}\frac{\beta}{\alpha} a = a P_A (1 + \frac{\beta}{\alpha})$ d'où on déduit que la fonction de demande de bien A est $A^d(P_A, P_B, R) = \frac{R}{P_A(1+\frac{\beta}{\alpha})} = A^d(P_A, R)$ car on constate que la demande de bien A de ce consommateur ne dépend pas du prix unitaire du bien B

Conclusion : les fonctions de demande de chacun des deux biens de ce consommateur sont :

$$B^d(P_B, R) = \frac{R}{P_{B.}(\alpha/\beta)+1}$$ pour le bien B et

$$A^d(P_A, R) = \frac{R}{P_{A.}(1+\beta/\alpha)}$$ pour le bien A

Remarque : on voit dans ces équations que la demande de A diminue avec le prix unitaire du bien A et la demande du bien B diminue avec le prix unitaire du bien B : donc A et B sont, nous le verrons, des biens typiques.

3. On suppose que $\alpha = \beta$. Déterminer l'équation de la courbe d'Engel pour le bien A, qu'en déduisez-vous ?

Si $\alpha = \beta$, la courbe d'Engel par le bien A est
$A^d(R) = R/\ 2\ P_A$
C'est une droite qui passe par l'origine, le bien A est un bien normal pour le consommateur.

Exercice 4

Un consommateur consacre une partie de son revenu notée R à la consommation de deux biens notés 1 et 2 (on note q_1 et q_2 le nombre d'unités consommées de chacun des deux biens) dont les prix unitaires sont respectivement p_1 et p_2.
On sait par ailleurs que les demandes de ce consommateur sont

$$q_1^d = R^2 \frac{p_2}{6\,p_1} \; et \; q_2^d = 9 \frac{p_1}{R\,.\,p_2}$$

Calculez et interprétez l'élasticité-revenu de chacun des biens

Calcul de l'élasticité-revenu du bien 1 dont la fonction de demande est $q_1^d = R^2 \frac{p_2}{6\,p_1}$:

$$Elasticit\acute{e} - revenu\,du\,bien\,1 = q_1^{d\,\prime} . \frac{R}{q_1^d} = 2\,R \frac{p_2}{6\,p_1} . \frac{R}{R^2 \frac{p_2}{6\,P_1}} = 2$$

Interprétation : si son revenu augmente de 1 %, ce consommateur va souhaiter augmenter sa consommation de bien 1 de 2 %. Le bien 1 est donc un bien supérieur de luxe pour ce consommateur

Calcul de l'élasticité-revenu du bien 2 dont la fonction de demande est $q_2^d = 9\dfrac{p_1}{R.p_2}$:

$$Elasticité - revenu\,du\,bien\,2 = q_2^{d\,'}.\frac{R}{q_2^d} = -9\frac{p_1}{R^2 p_2}\frac{R}{\dfrac{9\,p_1}{R.p_2}} = -1$$

Interprétation : quand son revenu augmente de 1 %, ce consommateur désire diminuer sa consommation de bien 2 de 1 %. Le bien 2 est donc un bien inférieur pour ce consommateur

Exercice 5

Soit un consommateur qui consacre un budget noté B à la consommation d'un panier composé d'un bien X et d'un bien Y. Ses préférences sont caractérisées par la fonction d'utilité suivante : $U(x,y) = x^2.y^3$ où x représente le nombre d'unités consommées de bien X et y le nombre d'unités consommées de bien Y. On notera p_x et p_y les prix de chacun des deux biens.

1. Déterminez les fonctions de demande des biens X et Y

Pour déterminer les fonctions de demandes il faut partir de la condition d'équilibre. Tout panier qui maximise la satisfaction de ce consommateur vérifie Umx/px = Umy/py, ce qui donne, compte tenu de la fonction d'utilité de ce consommateur : $2x.y^3/p_x = 3x^2.y^2/p_y$

En simplifiant cette expression on trouve : $2y/p_x = 3x/p_y$, une relation que l'on va utiliser dans la contrainte budgétaire :

Calcul de la fonction de demande de bien X	Calcul de la fonction de demande de bien Y
De l'équation ci-dessus on déduit $y = 3x.p_x/2p_y$ On remplace y par cette expression dans l'équation de la contrainte budgétaire : $B = x.p_x + y.p_y$ $B = x.p_x + (3x.p_x/2p_y).p_y$ $B = x.(p_x + 3p_x/2) = x.p_x.5/2$ d'où $X^d (p_x,p_y,R) = X^d(p_x,R) = 2B/5p_x$	De l'équation ci-dessus on déduit $x = 2y.p_y/3p_x$ On remplace x par cette expression dans l'équation de la contrainte budgétaire : $B = x.p_x + y.p_y$ $B = (2y.p_y/3p_x).p_x + y.p_y$ $B = y.(2p_y/3 + y.p_y) = y.p_y.5/3$ d'où $Y^d (p_x,p_y,R) = Y^d (p_y,R) = 3B/5p_y$

Remarque : ici la demande de bien X ne dépend pas du prix du bien Y et la demande de bien Y ne dépend pas du prix du bien X.

2. Calculez et interprétez l'élasticité-revenu de chacun des deux biens. Qu'en concluez-vous ?

$$Elasticité-revenu\,du\,bien\,X=\frac{2}{5\,p_x}\frac{B}{\frac{2\,B}{5\,p_x}}=1$$

Quand le budget de ce consommateur augmente de 1 %, sa demande de bien X augmente également de 1 %.

$$Elasticité-revenu\,du\,bien\,Y=\frac{3}{5\,p_y}\frac{B}{\frac{3\,B}{5\,p_y}}=1$$

Quand le budget de ce consommateur augmente de 1 %, sa demande de bien Y augmente également de 1 %.

Conclusion : les biens X et Y sont des biens normaux pour ce consommateur