Réflexe :
Importer les librairies nécessaires au cacul scientifique et à la représentation graphique de fonctions.

Entrée[ ]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

TP Python 11 : Méthodes de balayage et de dichotomie

Partie 1 : Objectifs

On considère une fonction $f \ : \ \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$. On s'intéresse à l'équation :

$$(\mathcal{E}) \ : \qquad f(x) = 0.$$

- On appelle **zéro d'une fonction** f une solution de l'équation $f(x) = 0$
- L'objectif de cette séance est de construire des algorithmes permettant d'**approcher autant qu'on le souhaite** le(s) zéro(s) d'une fonction.
- Nous allons étudier deux méthodes, qui sont des méthodes dites **itératives** : on répète l'algorithme plusieurs fois de suite, jusqu'à ce qu'un **critère d'arrêt** soit vérifié.
- Dans le cas de la recherce de zéros d'une fonction, on souhaite s'arrêter **lorsqu'on s'approche de la solution à une précision ε donnée.**

D'un point de vue pratique, une machine ne pouvant chercher simultanément deux solutions à la fois, on se placera dans des cas simples :

On suppose par la suite que la fonction f considérée admet **un** zéro sur un intervalle I **donné**

Partie 2 : Algorithme de balayage

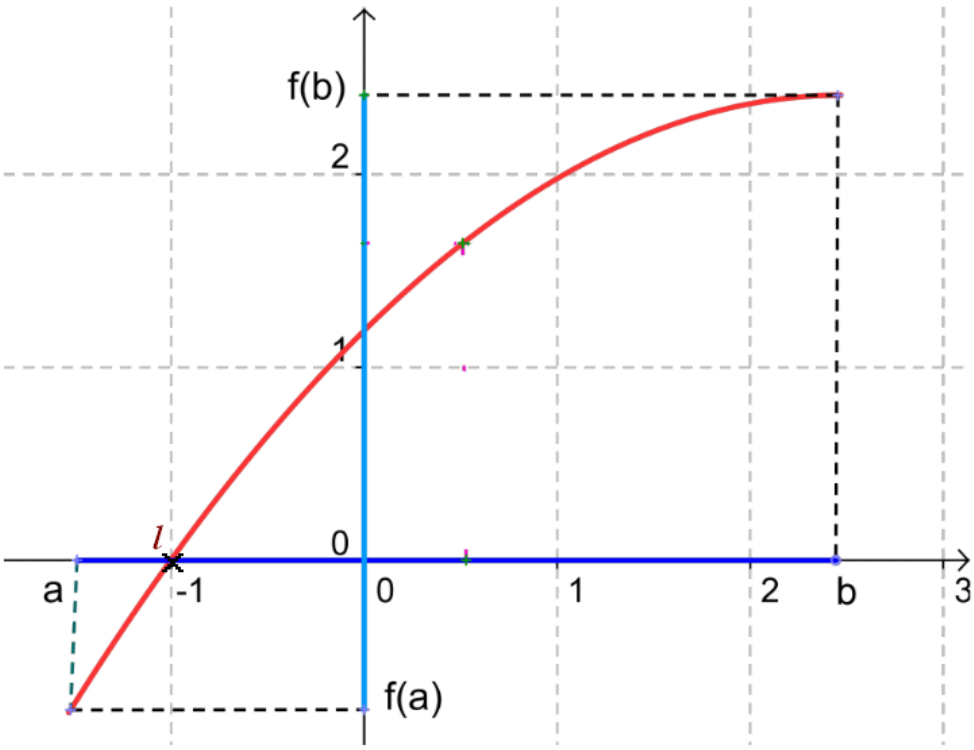
II.1) Préliminaires

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$.

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle $[a; b]$ telle que $f(a) \times f(b) < 0$.
Le théorème de la bijection permet d'affirmer qu'il existe un unique nombre réel

$l \in [a; b]$ tel que $f(l) = 0$.

La méthode par balayage permet de déterminer un encadrement du nombre l à 10^{-n} près, où n est un nombre entier naturel fixé.



II.2) Principe de la méthode

On va chercher un encadrement du nombre $\sqrt{10}$.

1. Justifier que la fonction f, définie sur l'intervalle $[3; 4]$ par $f(x) = x^2 - 10$, vérifie les conditions citées précédemment.
2. Indiquer la solution exacte l, sur l'intervalle $[3; 4]$, de l'équation $f(x) = 0$.

À vous de faire 1 :

1. Implémenter une fonction Python `f` qui, étant donné un réel x en argument, renvoie la valeur $x^2 - 10$.
2. Tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[2; 5]$ pour plus de visibilité. Sur le même graphique, représenter la droite d'équation $y = 0$.

Entrée[ ]:

```
1
```

Comme $3^2 < 10 < 4^2$, on peut affirmer que $l = \sqrt{10} \in]3; 4[$.

On peut le vérifier car $f(3) = -1$ et $f(3) < 0$ alors que $f(4) = 6$ et $f(4) > 0$.

La méthode, dite par balayage, est basée sur le principe suivant :

On commence par balayer l'intervalle $[3;4]$ avec un pas égal à 0.1, c'est-à-dire que l'on calcule $f(3)$, $f(3.1)$, $f(3.2)$, ... et on s'arrête dès que l'on a trouvé le chiffre p pour lequel $f(3+p\times 0.1)$ et $f(3+(p+1)\times 0.1)$ sont de signes opposés.

L'entier p représente le nombre d'**itérations** effectuée par la méthode de balayage avec ici un pas de 0.1.

À vous de faire 2 :
Écrire un programme qui détermine l'entier naturel p puis affiche p et un encadrement de $\sqrt{10}$ à 10^{-1} près.

Remarque On peut utiliser la fonction `print` de manière un peu sophistiquée, avec par exemple la commande suivante :
`print("Après ",p," itérations, on obtient une approximation à 0.1 près de racine de 10, qui est comprise entre",3+p*pas,"et",3+(p+1)*pas)`

Entrée[ ]:
```
1
```

On poursuit ensuite le balayage de l'intervalle $[3,1\ ;\ 3,2]$ avec un pas égal à $0,01$ **afin de raffiner l'encadrement de $\sqrt{10}$.**

À vous de faire 3 :
Écrire un programme qui détermine la nouvelle valeur de l'entier naturel p puis affiche un encadrement de $\sqrt{10}$ à 10^{-2} près.

Entrée[ ]:
```
1
```

Finalement, l'idée est la même quel que soit la **précision** que l'on souhaite obtenir pour l'encadrement de $\sqrt{10}$!

À vous de faire 4 :

1. Écrire **une fonction** `balayage` qui prend en argument le point de départ du balayage $a\in\mathbb{R}$ ainsi que l'ordre de précision $n\in\mathbb{N}$. Cette fonction doit déterminer un encadrement de $\sqrt{10}$ à 10^{-n} près, et afficher le nombre d'itérations nécessaires à l'obtention de cet encadrement ainsi que l'encadrement en lui-même.
2. Testez votre fonction pour $a=3$ et $n=1$, ainsi que $a=3$ et $n=1$ afin de vous assurez que votre programme fonctionne.

3. Testez votre fonction pour $a = 3$ et $n = 3$, puis $n = 4$, $n = 5$, $n = 6$, $n = 7$ et $n = 8$. À partir de quelle valeur de n l'ordinateur commence-t-il a prendre plus qu'une fraction de seconde pour effectuer son calcul? *On veillera à ne pas dépasser $n = 8$, pour le bien-être de votre machine...*

Entrée[ ]:
```
1
```

Partie 3 : Algorithme de dichotomie

III.1) Préliminaires

La méthode de la dichotomie est une autre méthode itérative de recherche des zéros d'une fonction. *Dichotomie* vient du grec *dikhotomia*, ou "division en deux parties".

Supposons qu'on dispose à nouveau d'une fonction f est continue sur l'intervalle $[a, b]$, avec $f(a) \leq 0$ et $f(b) \geq 0$. On sait donc qu'il existe au moins un réel c dans l'intervalle $[a, b]$ tel que $f(c) = 0$ par le théorème des valeurs intermédiaires.

L'idée est alors d'évaluer ce que vaut f au milieu de $[a, b]$, et de distinguer les deux cas suivants :

- si $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq 0$, alors on sait qu'on a une racine dans l'intervalle $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$.
- sinon, $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$ et on sait qu'on a une racine dans l'intervalle $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$.

Ainsi, dans les deux cas, on a trouvé un intervalle de longueur moitié dans lequel est située une racine de l'équation $f(x) = 0$. On recommence alors avec cet intervalle, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on trouve une approximation qui nous convienne.

Formellement, on définit les suites (a_n) et (b_n) en posant

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
- si $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \leq 0$, alors $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.
- sinon, $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$.

On a toujours une solution à l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[a_n, b_n]$, qui est de longueur $(b - a)/2^n$.

À vous de faire 6 :
On cherche à approcher la solution de $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[a, b]$ à une précision $\varepsilon > 0$ donnée.

Minorer le nombre d'étapes n à effectuer pour obtenir un encadrement de la solution à ε près.

→Cliquez-ici pour la réponse ←

III.2) Mise en pratique

À vous de faire 6 :

1. Toujours avec la même fonction $f\ :\ x \longmapsto x^2 - 10$, écrire une **fonction** `dichotomie` qui prend en argument les variables a et b représentant les bornes de l'intervalle, et la variable eps représentant la précision recherchée. Cette fonction doit **afficher** un encadrement de $\sqrt{10}$ à la précision donnée, ainsi que le **nombre d'itérations de la méthode**.
2. Quel est le type des variables a et b?
3. Quel est le type de la variable eps?
4. Testez votre fonction pour $a = 3$ et $b = 4$ lorsque $eps = 0.001$.

Entrée[ ]:

```
1
```

Partie 4 : Comparaison des deux algorithmes

À vous de faire 6 :
Comparez les deux méthodes en appelant votre fonction `balayage` et votre fonction `dichotomie` pour différentes valeurs de précision.

Attention : on veillera à bien faire la différence.

- Pour la méthode de balayage, on donne le **pas de discrétisation qui s'avère être aussi la précision**.
- Pour la méthode de dichotomie, **la précision correspond à la longueur de l'intervalle** obtenu!

Entrée[ ]:

```
1
```

La méthode de dichotomie est **bien plus puissante** que la méthode de balayage.

On dit que la **complexité** de la méthode de dichotomie est meilleure que celle de balayage : le nombre de calculs à effectuer pour la dichotomie est nettement inférieur au nombre de calculs à effectuer pour le balayage.