Réflexe :

Importer les librairies nécessaires au calcul scientifique.

Entrée[ ]:
```
1
```

TP Python 12 : Approximation d'intégrales

Partie 0 : Préliminaires

À vous de jouer

Implémenter une fonction python `f` prenant en argument un réel x et renvoyant le réel $\sqrt{1-x^2}$. Cette fonction sera utilisée à plusieurs reprises dans ce TP : il est inutile de l'implémenter de nouveau et vous pouvez tout à fait l'appeler à l'intérieur d'une autre fonction!

Entrée[ ]:
```
1
```

Partie I : Méthode des rectangles

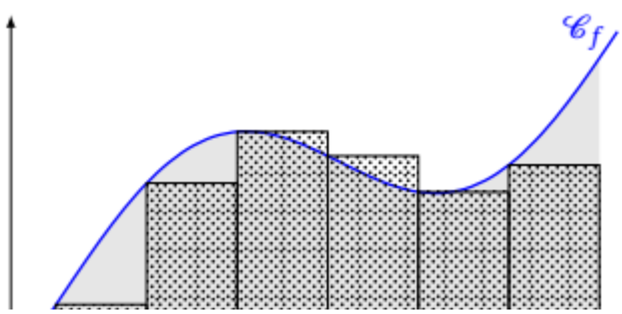
Lorsqu'une fonction est continue sur un segment $I=[a,b]$, on décompose I en subdivision de longueur $\frac{b-a}{n}$:

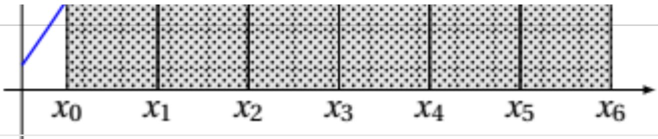
$$\left[a, a+\frac{b-a}{n}\right], \left[a+\frac{b-a}{n}, a+2\frac{b-a}{n}\right] \ldots, \left[a+k\frac{b-a}{n}, a+(k+1)\frac{b-a}{n}\right]$$

On calcule alors la somme des aires des rectangles inférieurs (ou supérieurs) : pour l'intervalle

$$\left[a+k\frac{b-a}{n}, a+(k+1)\frac{b-a}{n}\right],$$

on prend le rectangle de hauteur $f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$ (rectangle inférieur), ou $f\left(a+(k+1)\frac{b-a}{n}\right)$.





Lorsque n tend vers $+\infty$, l'aire obtenue, si la fonction est continue, tend vers l'intégrale de la fonction sur le segment.

On peut donc appliquer la méthode des rectangles, c'est-à-dire le calcul des sommes de Riemman, pour déterminer une valeur approchée de l'intégrale.

À vous de jouer

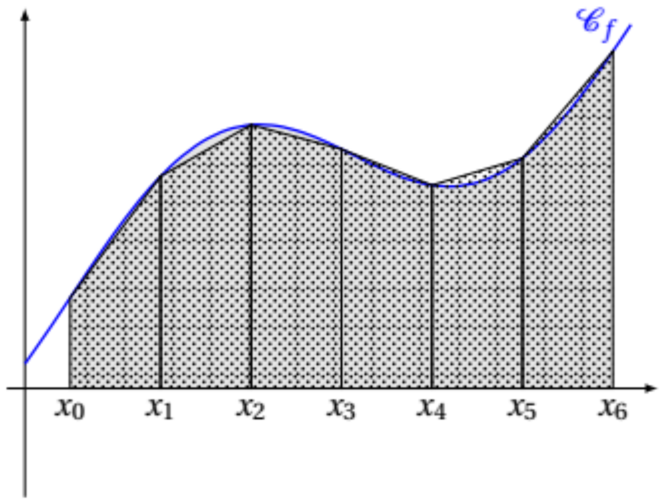
1. Implémenter la méthode des rectangles afin de calculer une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.
2. Quelle est la valeur de l'intégrale lorsque l'on subdivise l'intervalle $[0,1]$ avec un pas de $n = 100$?

```
Entrée[ ]: 1
```

Partie II : Méthode des trapèzes

On approche l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ par les sommes :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)+f\left(a+(k+1)\frac{b-a}{n}\right)}{2} = \frac{1}{2}(S_n(f)+S'_n(f))\,.$$



On peut montrer que, si f est de classe C^2 sur $[a;b]$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \left|\frac{1}{2}(S_n(f)+S'_n(f)) - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2}\max_{[a:b]}|f''|.$$

Ainsi, la suite converge vers l'intégrale avec une vitesse $\frac{1}{n^2}$, ce qui est plus efficace que la méthode des rectangles, pour laquelle la suite converge vers l'intégrale avec une vitesse $\frac{1}{n}$.

À vous de jouer

1. Implémenter la méthode des trapèzes afin de calculer une valeur approchée de $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.
2. Quelle est la valeur de l'intégrale lorsque l'on subdivise l'intervalle $[0,1]$ avec un pas de $n = 100$?

Entrée[ ]:
```
1
```

Remarques

- Remarquons que, la valeur approchée obtenue par la méthode des trapèzes est meilleure que celle obtenue avec la méthode des rectangles. En effet ,
$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} \simeq 0,7853981634.$$
- Au lieu de calculer pour un rang n, on peut utiliser les majorations vues pour obtenir une valeur approchée à une certaine précision, avec une boucle `while` .

(HP) Partie III : Une introduction à la méthode de Monte-Carlo

Réflexe :
Importer la librairie nécessaire à la simulation de variables aléatoires.

Entrée[ ]:
```
1
```

La méthode de Monte-Carlo est une méthode **probabiliste** d'approximation d'une intégrale. Elle est hors programme, mais va vous permettre d'utiliser des outils que vous avez déjà vus au cours des TP précédents.

Considérons une fonction f continue sur un segment $[a,b]$. Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi uniforme sur le segment $[a,b]$. Soient N échantillons $x_1, \dots x_N$ de cette variables aléatoire. L'évaluation de l'intégrale par la méthode de Monte-Carlo consiste (dans sa forme élémentaire) à calculer la somme suivante :
$$S_N = \frac{b-a}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i).$$

Il s'agit de la même formule que celle de la méthode des rectangles, avec des points répartis aléatoirement dans l'intervalle $[a, b]$. Lorsque le nombre N d'échantillons de la variable aléatoire X devient très grand, la somme S_N s'approche de l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

À vous de jouer

1. A l'aide de la fonction `random`, comment pourriez-vous simuler un nombre **réel** x appartenant à un segment $[a, b[$?

→ Cliquez-ici pour la réponse ←

À vous de jouer

2. A l'aide de question précédente, écrire une fonction `echantillons` prenant en argument un entier naturel non nul N et deux réels a et b (avec $a < b$), et renvoyant la liste contenant N réalisation d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur le segment $[a, b]$.

```
Entrée[ ]: 1
```

À vous de jouer

3. On considère toujours la fonction $f\ :\ x \longmapsto \sqrt{1 - x^2}$ sur l'intervalle $[0, 1]$ (ici donc $a = 0$ et $b = 1$!). Écrire une fonction `MonteCarlo` qui étant donné le nombre $N \in \mathbb{N}^*$ renvoie la somme S_N mentionnée ci-dessus.

   Exécuter cette fonction pour $N = 100$, $N = 1000$ et $N = 10000$.

```
Entrée[ ]: 1
```

Enregistré avec succès ×

Les informations ont bien été enregistrées dans Capytale.

OK

À vous de jouer

4. Que doit modifier dans la fonction `MonteCarlo` précédente si cette fois-ci il est question de déterminer l'intégrale d'une autre fonction g définie sur un segment $[a, b]$ quelconque?

→ Cliquez-ici pour la réponse ←

À vous de jouer

5. On cherche à tester l'efficacité de la méthode de Monte-Carlo pour le calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} \simeq 0,7853981634$. Exécutez le programme suivant : que fait-il? Commentez chacune des lignes du programme à l'aide de la commade dièse #.

Entrée[ ]:

```
# Votre commentaire
eps = 1e-3

# Votre commentaire
N=1
val_approx = MonteCarlo(N)
val_exacte = np.pi/4

# Votre commentaire
while np.absolute(val_approx - val_exacte)>=eps :
    # Votre commentaire
    N = N+1
    # Votre commentaire
    val_approx = MonteCarlo(N)

print("Il faut ",N," valeurs prises aléatoirement dans [0,1]$ pou
print("La valeur approchée de l'intégrale de f sur [0,1] vaut",va
```

À vous de jouer

5. Pourquoi, lorsque l'on exécute le programme précédent, le nombre N varie? Que proposeriez-vous afin de déterminer rigoureusement le nombre de points $(x_i)_{i=1}^n$ de $[0, 1]$ nécessaire à ce que l'intégrale approchée soit proche $\frac{\pi}{4}$ à 0.001 près?

Enregistré avec succès.

×

Les informations ont bien été enregistrées dans Capytale.

OK