Exercice 1

Soit une entreprise caractérisée par la fonction de production suivante : $Q=f(L,K)=L^{3/4}.K^{1/4}$. On sait que l'entreprise caractérisée par cette fonction de production produit actuellement 16 000 tonnes de pommes avec 160 000 heures de travail et 16 sécateurs.

1. Calculez et interprétez les productivités marginales et moyennes de cette entreprise.

Commençons avec les productivités marginales

Les fonctions de productivités marginales sont les dérivées partielles de la fonction de production :

$$PmL = f'_L(L,K) = \frac{3}{4} K^{1/4} L^{-1/4} = \frac{3K^{1/4}}{4L^{1/4}}$$

ce qui donne, avec la combinaison productive composée de 160 000 heures de travail et 16 sécateurs

$$PmL = \frac{3.16^{1/4}}{4.160000^{1/4}} = 0{,}075$$

Interprétation : **la dernière heure de travail utilisée pour produire a permis de récolter 0,075 tonne soit 75 kilogrammes de pommes supplémentaires**

$$PmK = f'_K(L,K) = \frac{1}{4} K^{-3/4} L^{3/4} = \frac{1 L^{3/4}}{4 K^{3/4}}$$

ce qui donne, avec la combinaison productive composée de 160 000 heures de travail et 16 sécateurs

$$PmK = \frac{160000^{3/4}}{4.16^{3/4}} = 250$$

Interprétation : **le dernier sécateur utilisé pour produire a permis de récolter 250 tonnes de pommes supplémentaires**

Regardons maintenant les productivités moyennes

Les productivités moyennes mesurent la quantité d'output (ici de pommes) que chaque unité d'input (ici du travail et du capital) ont permis de produire en moyenne. Elles se calculent donc en divisant la production par le nombre d'unités de travail (productivité moyenne du travail) et par le nombre d'unités de capital (productivité moyenne du capital) :

$$PML = \frac{Q}{L} = \frac{16000}{160000} = 0{,}1$$

Interprétation : **chaque heure de travail a permis de récolter 100 kilogrammes de pommes en moyenne**

$$PMK = \frac{Q}{K} = \frac{16000}{16} = 1000$$

Interprétation : **chaque sécateur a permis de récolter 1000 kilogrammes de pommes en moyenne**

On peut remarquer que $PmL < PML$ et $PmK < PMK$ ce qui est la manifestation de rendements factoriels décroissants : les dernières unités de travail et de capital ont permis de produire moins que ce que les précédentes unités avaient permis de produire. Ce résultat est cohérent avec ce que nous avons vu précédemment : quand α et β sont inférieurs à 1, les productivités marginales d'un producteur dont la fonction de production est une fonction Cobb-Douglas sont décroissantes.

2. Donnez l'équation de l'isoquante et expliquez ce qu'elle représente

L’équation de l’isoquante correspondant à un niveau d’output de 10 000 se détermine à partir de l’équation $16000 = L^{3/4}.K^{1/4}$, ce qui donne, dans le repère (L,K) :

$$K = \left(\frac{16000}{L^{3/4}}\right)^4 = \frac{16000^4}{L^3}$$

Cette équation est vérifiée par toutes les combinaisons productives qui permettent de produire de manière efficace (c’est-à-dire sans gaspillage) 16 000 tonnes de pommes.

3. Démontrez que le capital et le travail sont imparfaitement substituables pour ce producteur de pommes

On sait qu'**une fonction de production de type Cobb-Douglas caractérise une technique de production dont les facteurs sont imparfaitement substituables**.

On peut également **prouver ce résultat en** :

1. Rappelant que différentes combinaisons productives permettent d'atteindre un même niveau de production. Par exemple, toutes celles qui vérifient $K = \frac{16000^4}{L^3}$ permettent de produire 16 000 tonnes de pommes : le travail et le capital sont donc substituables
2. Constatant que la production sera nulle si le producteur n'utilise pas de travail ou pas de capital : $f(0, K) = 0^{3/4} . K^{1/4} = 0$ et $f(L, 0) = L^{3/4} . 0^{1/4} = 0$. Le travail et le capital sont donc imparfaitement substituables.

4. Quelle est la nature des rendements d’échelle de cette entreprise ?

Deux possibilités pour répondre à cette question :

1. La plus simple : la fonction de production est une fonction de type Cobb-Douglas donc ses rendements d'échelle sont déterminés par les valeurs de α et β. Ici, $\alpha+\beta=3/4+1/4=1$ donc les rendements d'échelle sont constants

2. La moins rapide (par laquelle il est nécessaire de passer si la fonction de production n'est pas une Cobb-Douglas) : on calcule $f(\lambda L,\lambda K)$ pour $\lambda>0$:

$f(\lambda L,\lambda K)=(\lambda L)^{3/4}(\lambda K)^{1/4}=\lambda^{3/4+1/4}.L^{3/4}K^{1/4}=\lambda f(L,K)$ ce qui permet de déduire que les rendements d'échelle sont constants

Quelle que soit la manière de traiter la question il ne faut pas oublier de conclure : **les rendements d’échelle de ce producteur sont constants ce qui signifie que lorsqu’il multiplie par deux ses inputs, son niveau de production est lui aussi multiplié par deux. Il ne gagne ni ne perd en efficacité lorsqu’il augmente son niveau de production.**

5. Un sécateur a été cassé, à combien d’heure de travail en plus ce producteur doit-il faire appel s’il souhaite maintenir constant son niveau de production ?

Pour répondre à cette question, il faut calculer le $TMST_{L/K}$ pour la combinaison productive composée de 160 000 heures de travail et 16 sécateurs :

$$TMST_{L/K} = \frac{PmK}{PmL} = \frac{\frac{1}{4} K^{-3/4} L^{3/4}}{\frac{3}{4} K^{1/4} L^{-1/4}} = \frac{L}{3K} = \frac{160000}{3.16} \approx 3333$$

Ce producteur va devoir utiliser 3 333 heures de travail en plus pour compenser la perte d'un sécateur et continuer à produire 16 000 tonnes de pommes.

6. Les 160 000 heures de travail sont réalisées par 4 travailleurs. Le sécateur cassé a été réparé mais l’un de ces travailleur est tombé malade. Combien de sécateur(s) le producteur va-t-il de voir se procurer s’il souhaite continuer à récolter 16 000 tonnes de pommes ?

Pour répondre à cette question, il faut calculer le $TMST_{K/L}$ pour la combinaison productive composée de 4 travailleurs et 16 sécateurs :

$$TMST_{K/L} = \frac{PmL}{PmK} = \frac{\frac{3}{4} K^{1/4} L^{-1/4}}{\frac{1}{4} K^{-3/4} L^{3/4}} = \frac{3K}{L} = \frac{3 \otimes 16}{4} = 12$$

Ce producteur va devoir utiliser 12 sécateurs en plus pour compenser l'absence d'un de ses travailleurs s'il souhaite continuer à récolter 16 000 tonnes de pommes.