Exercice 4

Quelles sont les demandes conditionnelles d'inputs d'un producteur dont les contraintes techniques sont caractérisées par la fonction de production suivante : $f(L,K)=L^{1/3}K^{2/3}$? On notera w le prix unitaire du travail et r celui du capital.

Commençons par calculer l'équation du sentier d'expansion de ce producteur qui établit la relation qui existe entre toutes les combinaisons productives optimales. Cette relation est tirée de la condition d'équilibre $\frac{PmL}{w}=\frac{PmK}{r}$ ce qui signifie ici que $\frac{\frac{1}{3}L^{-2/3}K^{2/3}}{w}=\frac{\frac{2}{3}L^{1/3}K^{-1/3}}{r}$ ce qui signifie que $\frac{K}{w}=\frac{2L}{r}$ d'où on déduit que $K=\frac{2w}{r}L$ et $L=\frac{r}{2w}K$, deux relations que l'on utilise dans la fonction de production pour établir les demandes conditionnelles d'inputs

Détermination de la demande conditionnelle de travail $Q=L^{1/3}\left(\frac{2w}{r}L\right)^{2/3}=\left(\frac{2w}{r}\right)^{2/3}L$ d'où on déduit que la demande conditionnelle de travail est : $L^d(w,r,Q)=Q\left(\frac{r}{2w}\right)^{2/3}$	Détermination de la demande conditionnelle de capital $Q=\left(\frac{r}{2w}K\right)^{1/3}K^{2/3}=\left(\frac{r}{2w}\right)^{1/3}K$ d'où on déduit que la demande conditionnelle de capital est : $K^d(w,r,Q)=Q\left(\frac{2w}{r}\right)^{1/3}$

Précisez la nature des rendements d'échelle et des rendements factoriels de ce producteur.

Comme il s'agit ici d'une fonction Cobb-Douglas c'est-à-dire de type $f(L,K)=L^{\alpha}K^{\beta}$, la nature des rendements dépend des valeurs prises par α et β. α et β étant inférieurs à 1 nous pouvons affirmer que les rendements factoriels sont décroissants, $\alpha + \beta$ étant égal à 1 nous en déduisons que les rendements d'échelle sont constants.