

Réflexe :

Importer les librairies nécessaires au calcul scientifique et à la représentation graphique.

Entrée[1]: 1



TP Python 15 : Sky's the limit



Dans ce TP, nous allons nous intéresser au comportement asymptotique de suites et de séries numériques. Ce genre d'exercice mêlent généralement la définition dite "*epsilonesque*" de la convergence et programmation : autant dire que c'est un classique des concours...

Partie I - Suites

Exercice 1

On considère la suite $(u_n)_n$ définie explicitement par $u_n = n^2 - n + 1$.

1. Déterminer mathématiquement la nature de cette suite.
2. Ecrire un programme Python permettant de déterminer le rang N à partir duquel on a, pour tout $n \geq N$, $u_n \geq 1000$.

Entrée[3]: 1

A partir du rang $N = 101$ les termes de la suite dépassent 1000.

Exercice 2

On considère la suite $(v_n)_n$ définie explicitement par $v_n = \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer mathématiquement la limite de cette suite.
2. Définir une fonction v qui, étant donné un entier naturel n , renvoie le $n + 1$ -ème terme de la suite $(v_n)_n$.
3. Sur un même graphique, représenter la droite d'équation $y = 2$ en continue et en rouge, ainsi que les 500 premiers termes de la suite $(v_n)_n$, avec des croix bleues.
4. Ecrire un programme Python permettant de déterminer le rang N à partir duquel on a, pour tout $n \geq N$, $|v_n - 2| \leq 10^{-3}$.
5. Ecrire un programme Python permettant de déterminer le rang M à partir duquel on a, pour tout $n \geq M$, $v_n \in [1.7, 2.3[$.

Entrée[]: 1

Partie II - Séries

Exercice 3 : Série de Riemann

On considère la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$. On peut montrer (HP ECG!) que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

1. Ecrire une fonction `riemann` qui, étant donné un entier n non nul, renvoie la n – ième somme partielle $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

2. Sur un même graphique, afficher les 100 premiers termes de la série alternée $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ avec des croix magenta et la droite d'équation $y = \frac{\pi^2}{6}$ en bleu.

3. Ecrire un programme qui affiche le premier rang $N \geq 1$ à partir duquel, pour tout entier $n \geq N$,

$$\left| \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \frac{\pi^2}{6} \right| \leq 10^{-3}$$

4. Ecrire une fonction `reste_riemann` qui, étant donné un entier n non nul, renvoie le reste

$$R_n = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

5. Ecrire un programme qui affiche le premier rang $M \geq 1$ à partir duquel, pour tout entier $n \geq M$,

$$|R_n| \leq 10^{-4}$$

Entrée[]: 1

Exercice : Série harmonique alternée

1. Ecrire une fonction `inverse` qui, étant donné un entier n non nul, renvoie $\frac{1}{n}$.
2. Ecrire une fonction `harmonique_alternee` qui, étant donné un entier n non nul, renvoie $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.
3. Sur un graphique, afficher les 100 premiers termes de la série alternée $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.
4. Sur le même graphique, afficher la droite d'équation $y = \ln(2)$. Que pouvez-vous conjecturer?
5. Ecrire un programme qui affiche le premier rang $N \geq 1$ à partir duquel, pour tout entier $n \geq N$,

$$\left| \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln(2) \right| \leq 10^{-3}$$

Entrée[4]: 1

A partir de $N = 500$ la série alternée est proche de $\ln(2)$ à 0.001 près.

Exercice : Série harmonique

1. Ecrire une fonction `harmonique` qui, étant donné un entier n non nul, renvoie $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.
2. Sur un graphique, afficher les 100 premiers termes de la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$.
3. Sur le même graphique, afficher les 100 premiers termes de la suite $(\ln(n))_{n \geq 1}$. Que pouvez-vous conjecturer?

Entrée[41]: 1