Réflexe :
Importer les librairies nécessaires au calcul scientifique et à la représentation graphique.

Entrée[1]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

TP Python 15 : Sky's the limit

Correction

Dans ce TP, nous allons nous intéresser au comportement asymptotique de suites et de séries numériques. Ce genre d'exercice mêlent généralement la définition dite "*epsilonesque*" de la convergence et programmation : autant dire que c'est un classique des concours...

Partie I - Suites

Exercice 1
On considère la suite $(u_n)_n$ définie explicitement par $u_n = n^2 - n + 1$.

1. Déterminer mathématiquement la nature de cette suite.
2. Ecrire un programme Python permettant de déterminer le rang N à partir duquel on a, pour tout $n \geq N$, $u_n \geq 1000$.

Entrée[3]:
```
def u(n):
    return n**2-n+1

N = 0
while (u(N)<10000):
    N = N+1
print("A partir du rang N=",N, "les termes de la suite dépassent 1000.")

```

```
A partir du rang N= 101 les termes de la suite dépassent 1000.
```

Exercice 2

On considère la suite $(v_n)_n$ définie explicitement par $v_n = \dfrac{2n^2 - 1}{n^2 + 2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer mathématique la limite de cette suite.
2. Définir une fonction `v` qui, étant donné un entier naturel n, renvoie le $N+1$-ème terme de la suite $(v_n)_n$.
3. Sur un même graphique, représenter la droite d'équation $y = 2$ en continue et en rouge, ainsi que les 500 premiers termes de la suite $(v_n)_n$, avec des croix bleues.

4. Ecrire un programme Python permettant de déterminer le rang N à partir duquel on a, pour tout $n \geq N$, $|v_n - 2| \leq 10^{-3}$.
5. Ecrire un programme Python permettant de déterminer le rang M à partir duquel on a, pour tout $n \geq M$, $v_n \in [1.7, 2.3[$.

Entrée[ ]:

```
1
```

Partie II - Séries

Exercice 3 : Série de Riemann

On considère la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$. On peut montrer (HP ECG!) que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

1. Ecrire une fonction `riemann` qui, étant donné un entier n non nul, renvoie la $n - i\grave{e}me$ somme partielle $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.
2. Sur un même graphique, afficher les 100 premiers termes de la série alternée $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ avec des croix magenta et la droite d'équation $y = \frac{\pi^2}{6}$ en bleu.
3. Ecrire un programme qui affiche le premier rang $N \geq 1$ à partir duquel, pour tout entier $n \geq N$,
$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \frac{\pi^2}{6} \right| \leq 10^{-3}$$
4. Ecrire une fonction `reste_riemann` qui, étant donné un entier n non nul, renvoie le reste
$$R_n = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$
5. Ecrire un programme qui affiche le premier rang $M \geq 1$ à partir duquel, pour tout entier $n \geq M$,
$$|R_n| \leq 10^{-4}$$

Type *Markdown* and LaTeX: α^2

Exercice : Série harmonique alternée

1. Ecrire une fonction `inverse` qui, étant donné un entier n non nul, renvoie $\frac{1}{n}$.
2. Ecrire une fonction `harmonique_alternee` qui, étant donné un entier n non nul, renvoie $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

3. Sur un graphique, afficher les 100 premiers termes de la série alternée $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.
4. Sur le même graphique, afficher la droite d'équation $y = \ln(2)$. Que pouvez-vous conjecturer?
5. Ecrire un programme qui affiche le premier rang $N \geq 1$ à partir duquel, pour tout entier $n \geq N$,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln(2)\right| \leq 10^{-3}$$

Entrée[4]:

```
def inverse(n):
    return 1/n

def harmonique_alternee(n):
    S = 1
    for k in range(2,n+1):
        S = S +(-1)**(k-1)*inverse(k)
    return S

rangs = [n  for n in range(1,101)]
termes = [harmonique_alternee(n) for n in rangs]
log2 = [np.log(2) for n in rangs]

plt.clf()
plt.plot(rangs,termes,'+b')
plt.plot(rangs,log2,'+r')
plt.title("100 premiers termes de la série harmonique")
plt.xlabel("n")
plt.legend(["S_n","ln(n)"])
plt.show()

eps = 1e-3
N = 1
while np.abs(harmonique_alternee(N)-np.log(2))>= eps :
    N =N+1
print("A partir de N = ",N, " la série alternée est proche de ln(2) à  ",e
```

```
A partir de N =  500  la série alternée est proche de ln(2) à   0.001 près.
```

Exercice : Série harmonique

1. Ecrire une fonction `harmonique` qui, étant donné un entier n non nul, renvoie $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
2. Sur un graphique, afficher les 100 premiers termes de la série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$.
3. Sur le même graphique, afficher les 100 premiers termes de la suite $(\ln(n))_{n\geq 1}$. Que pouvez-vous conjecturer?

Entrée[41]:

```
def harmonique(n):
    H = 1
    for k in range(2,n+1):
        H = H + inverse(k)
    return H

rangs = [n  for n in range(1,101)]
termes = [harmonique(n) for n in rangs]
log = [np.log(n) for n in rangs]

plt.clf()
plt.plot(rangs,termes,'+b')
plt.plot(rangs,log,'+r')
plt.title("100 premiers termes de la série harmonique")
plt.xlabel("n")
plt.legend(["H_n","ln(n)"])
plt.show()
```