ESSEC 2008 voie E Maths II - CORRIGÉ

Préliminaires

P1. Pour tout x réel, si $x \geq 0$, $|x| = x$ donc $|x| - x = 0 \geq 0$, et si $x < 0$, $|x| = -x$ donc $|x| - x = -2x \geq 0$.
Finalement, dans tous les cas : $\boxed{|x| - x \geq 0}$.

P2.a $(|v_1| + |v_2| + |v_3|)^2 - (v_1 + v_2 + v_3)^2 = |v_1|^2 + |v_2|^2 + |v_3|^2 + 2(|v_1|\,|v_2| + |v_1|\,|v_3| + |v_2|\,|v_3|) - \left[v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + 2(v_1v_2 + v_1v_3 + v_2v_3)\right]$.
Soit, en réarrangeant les termes (et en remarquant que pour tout réel x, $|x|^2 = x^2$...) :

$$\boxed{(|v_1| + |v_2| + |v_3|)^2 - (v_1 + v_2 + v_3)^2 = 2\left(|v_1v_2| - v_1v_2\right) + 2\left(|v_1v_3| - v_1v_3\right) + 2\left(|v_2v_3| - v_2v_3\right)}$$

P2.b (E) s'écrit ici : $(|v_1| + |v_2| + |v_3|)^2 - (v_1 + v_2 + v_3)^2 = 0$, ou encore, avec ce qui précède :
$2\left(|v_1v_2| - v_1v_2\right) + 2\left(|v_1v_3| - v_1v_3\right) + 2\left(|v_2v_3| - v_2v_3\right) = 0$.
Or la question P1 nous indique qu'il s'agit d'une somme de trois termes positifs ou nuls ; cette somme est donc nulle si et seulement si les trois termes sont nuls, autrement dit, si et seulement si $\forall (j, j') \in [\![1, 3]\!]^2 \ : \ j \neq j', \quad \left|v_jv_{j'}\right| = v_jv_{j'}$.
Donc $\boxed{\text{si } \left|v_jv_{j'}\right| > 0 \text{ pour } (j, j') \in [\![1, 3]\!]^2 \text{ tel que } j \neq j'}$, alors $v_jv_{j'} > 0$, et donc : $\boxed{v_j \text{ et } v_{j'} \text{ ont même signe}}$.

P2.c Ce qui précède implique que les coefficients de V sont tous positifs ou nuls, ou tous négatifs ou nuls.
Or s'ils sont tous positifs ou nuls, $|V| = V$ et s'ils sont tous négatifs ou nuls, $|V| = -V$. On a donc bien : $\boxed{V = |V| \text{ ou } V = -|V|}$.

P3. Dans le cas général, élevons les deux membres de (E) au carré : on obtient $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} v_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq N} v_iv_j = \sum_{i=1}^{N} |v_i|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq N} |v_iv_j|$

Ou encore, en simplifiant comme dans le cas $N = 3$: $\displaystyle\sum_{1 \leq i < j \leq N} (|v_iv_j| - v_iv_j) = 0$.

Comme il s'agit d'une somme de termes positifs d'après P1, on obtient : $\forall (i, j) \in [\![1, N]\!]^2, \ v_iv_j = |v_iv_j| \geq 0$.
Ce qui prouve que les v_i sont soit tous positifs ou nuls, soit tous négatifs ou nuls (s'il existait v_i et v_j de signes contraires, on aurait $v_iv_j < 0$). Or s'ils sont tous positifs ou nuls, $|V| = V$ et s'ils sont tous négatifs ou nuls, $|V| = -V$.
Ainsi : $\boxed{\text{dans le cas général où } N \text{ est un entier quelconque vérifiant } N \geq 2, \text{ si } V \text{ vérifie } (E), V = |V| \text{ ou } V = -|V|}$.

Partie I : Google et PageRank

A. Etude de la matrice G de Google

I.A.1 $G \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ par définition et pour tout $(i, j) \in [\![1, N]\!]^2$, $\rho A(i, j) \geq 0$ et $\dfrac{1 - \rho}{N} > 0$ d'après l'énoncé, donc $G(i, j) > 0$. Ainsi : $\boxed{G \text{ est une matrice strictement positive}}$.

I.A.2 Soit $j \in \{1, ..., N\}$ tel que $d_j = 0$. $\boxed{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} G(i, j) = \sum_{i=1}^{N} \rho A(i, j) + \sum_{i=1}^{N} \frac{1 - \rho}{N} = \rho A(j, j) + N\frac{1 - \rho}{N} = \rho + 1 - \rho = 1}$.

I.A.3 Soit $j \in \{1, ..., N\}$ tel que $d_j > 0$.

$$\sum_{i=1}^{N} G(i, j) = \sum_{\substack{i \in \{1, ..., N\} \\ j \text{ pointe vers } i}} \left(\frac{\rho}{d_j} + \frac{1 - \rho}{N}\right) + \sum_{\substack{i \in \{1, ..., N\} \\ j \text{ ne pointe pas vers } i}} \frac{1 - \rho}{N} = \sum_{\substack{i \in \{1, ..., N\} \\ j \text{ pointe vers } i}} \frac{\rho}{d_j} + N\frac{1 - \rho}{N}.$$

Or il y a, par définition, d_j indices i vers lesquels j pointe, donc : $\boxed{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} G(i, j) = d_j\frac{\rho}{d_j} + 1 - \rho = 1}$.

I.A.4 On en déduit que $\boxed{G \text{ est une matrice stochastique}}$ (puisque G est strictement positive, et donc positive...).

I.A.5 On a : $G\begin{pmatrix} p(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ p(N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{j=1}^{N} G(1,j)p(j) \\ \cdot \\ \cdot \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{N} G(N,j)p(j) \end{pmatrix}$.

Autrement dit, si on note $V = \begin{pmatrix} p(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ p(N) \end{pmatrix}$, pour tout $i \in [\![1,N]\!]$, $(GV)_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{N} G(i,j)p(j) = p(i) = V_i$ d'après (S). Ainsi, $GV = V$:

$$\boxed{\text{le vecteur } \begin{pmatrix} p(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ p(N) \end{pmatrix} \text{ défini en (S), en admettant qu'il existe, est invariant par } G}.$$

B. Modèle du surfeur sur le Web

I.B.1 Pour tout $i \in [\![1,N]\!]$, $(v_n)_i = P(X_n = i) \geq 0$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} |(v_n)_j| = \sum_{j=1}^{N} P(X_n = j) = 1$ puisque $X_n(\Omega) \subset [\![1,N]\!]$ par hypothèse.

Donc $\boxed{V_n \text{ est bien un vecteur de probabilité}}$.

I.B.2 Pour tout $(i,j) \in \{1,2,...,N\}^2$, $\boxed{P(\{X_n = i\} \cap \{X_{n-1} = j\}) = P_{[X_{n-1}=j]}(X_n = i)P(X_{n-1} = j) = G(i,j)(V_{n-1})_j}$.

I.B.3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ donné. Pour tout $i \in [\![1,N]\!]$, on a (formule des probabilités totales, les $[X_{n-1} = j]$, $j \in [\![1,N]\!]$, formant un système complet d'événements puisque $X_{n-1}(\Omega) \subset [\![1,N]\!]$) :

$$P(X_n = i) = \sum_{j=1}^{N} P_{[X_{n-1}=j]}(X_n = i)P(X_{n-1} = j) = \sum_{j=1}^{N} G(i,j)(V_{n-1})_j = (GV_{n-1})_i$$

On en déduit donc que $\boxed{V_n = GV_{n-1}}$.

I.B.4 Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$: $V_0 = G^0 V_0$ puisque par définition, $G^0 = I_N$; si pour un certain $k \in \mathbb{N}$, $V_k = G^k V_0$, alors $V_{k+1} = GV_k$ d'après ce qui précède (le raisonnement ayant été effectué pour $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque, on peut prendre $n = k+1$) et donc $V_{k+1} = GG^k V_0 = G^{k+1} V_0$.

Finalement : $\boxed{\text{pour tout } k \text{ entier naturel, } V_k = G^k V_0}$.

Partie II : Matrices stochastiques

A. Etude d'un exemple

II.A.1 $Q - I_N = \begin{pmatrix} -q & q' \\ q & -q' \end{pmatrix}$ est de rang 1 puisque $q \neq 0$ et que $q'\begin{pmatrix} -q \\ q \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} q' \\ -q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(\star)$.

Donc l'ensemble des vecteurs $V \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $QV = V$ est $\boxed{\text{Ker } (Q - I_N) = \text{Vect } \begin{pmatrix} q' \\ q \end{pmatrix}}$

(le noyau est de dimension $2 - 1 = 1$ par le théorème du rang, et $(\star)$ donne un vecteur non nul appartenant au noyau...)

II.A.2 Soit $V_\infty \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ un vecteur de probabilité invariant par Q. Alors nécessairement, V_∞ est de la forme $\lambda\begin{pmatrix} q' \\ q \end{pmatrix}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0$ puisque V_∞ doit être positif, et $\|V\|_1 = 1$ implique $\lambda(q' + q) = 1$.

Ainsi, nécessairement, $V_\infty = \dfrac{1}{q+q'}\begin{pmatrix} q' \\ q \end{pmatrix}$. Comme, réciproquement, ce vecteur convient, on conclut :

$$\boxed{\text{il existe un unique vecteur de probabilité } V_\infty \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \text{ invariant par } Q : V_\infty = \frac{1}{q+q'}\begin{pmatrix} q' \\ q \end{pmatrix}}.$$

II.A.3 Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:
Pour $n = 1$:

$$\frac{1}{q+q'}\begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix} + \frac{(1-q-q')^1}{q+q'}\begin{pmatrix} q & -q' \\ -q & q' \end{pmatrix} = \frac{1}{q+q'}\begin{pmatrix} q' + q(1-q-q') & q' - q'(1-q-q') \\ q - q(1-q-q') & q + q'(1-q-q') \end{pmatrix} = \frac{1}{q+q'}\begin{pmatrix} (1-q)(q+q') & q'(q+q') \\ q(q+q') & (1-q')(q+q') \end{pmatrix}$$

Donc $\dfrac{1}{q+q'}\begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix} + \dfrac{(1-q-q')^1}{q+q'}\begin{pmatrix} q & -q' \\ -q & q' \end{pmatrix} = Q = Q^1$.

Supposons la relation vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

Alors $Q^{n+1} = QQ^n = Q\dfrac{1}{q+q'}\begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix} + \dfrac{(1-q-q')^n}{q+q'}Q\begin{pmatrix} q & -q' \\ -q & q' \end{pmatrix} = \dfrac{1}{q+q'}\begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix} + \dfrac{(1-q-q')^n}{q+q'}\begin{pmatrix} 1-q & q' \\ q & 1-q' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q & -q' \\ -q & q' \end{pmatrix}$

(les vecteurs colonnes de la première matrice étant égaux à V_∞, ils sont invariants par Q...)

Et il n'y a plus qu'à arranger le produit matriciel du second terme pour trouver :

$Q^{n+1} = \dfrac{1}{q+q'}\begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix} + \dfrac{(1-q-q')^{n+1}}{q+q'}\begin{pmatrix} q & -q' \\ -q & q' \end{pmatrix}$

Finalement : $\boxed{\text{pour tout entier } n \geq 1,\ Q^n = \dfrac{1}{q+q'}\begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix} + \dfrac{(1-q-q')^n}{q+q'}\begin{pmatrix} q & -q' \\ -q & q' \end{pmatrix}}$.

II.A.4 Comme par hypothèse, $0 < q < 1$ et $0 < q' < 1$, on a $-1 < 1-q-q' < 1$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-q-q')^n = 0$.

La convergence d'une suite de matrice étant entendue coefficient par coefficient, on en déduit que :

$\boxed{(Q^n)_{n\geq 1} \text{ converge lorsque } n \text{ tend vers l'infini vers la matrice } \dfrac{1}{q+q'}\begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix}, \text{ dont les deux vecteurs colonnes sont bien égaux à } V_\infty}$.

B. Existence d'un vecteur de probabilité invariant

II.B.1 Pour tout $i \in [\![1,N]\!]$, $({}^tQU)_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{N} {}^tQ(i,j)U_j = \sum_{j=1}^{N} Q(j,i) = 1$ puisque Q est stochastique. Donc $\boxed{{}^tQU = U}$.

II.B.2 $\boxed{\text{Si } Q - I_N \text{ est inversible}}$, il existe une matrice $P \in M_N(\mathbb{R})$ telle que $(Q-I_N)P = I_N$. Alors (d'après le résultat admis au début de l'énoncé) ${}^tP{}^t(Q-I_N) = {}^tI_N$, ou encore : ${}^tP({}^tQ - I_N) = I_N$, et donc $\boxed{{}^tQ - I_N \text{ est inversible}}$ (d'inverse ${}^tP$).

II.B.3 De II.B.1, on déduit que 1 est valeur propre de ${}^tQ$, donc ${}^tQ - I_N$ n'est pas inversible, donc avec II.B.2, par contraposée, $Q - I_N$ n'est pas inversible, et donc $\boxed{1 \text{ est valeur propre de } Q}$.

II.B.4 $QV = \lambda V$ donc pour tout $i \in [\![1,N]\!]$, $(QV)_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{N} Q(i,j)V_j = \lambda V_i$ et en prenant les valeurs absolues, par inégalité triangulaire :

$|\lambda|\,|V_i| = |V_i| \leq \displaystyle\sum_{j=1}^{N} |Q(i,j)V_j| = \sum_{j=1}^{N} Q(i,j)\,|V_j| = (Q\,|V|)_i$ (la matrice Q est positive).

Donc pour tout $i \in [\![1,N]\!]$, $(Q\,|V|)_i - |V_i| \geq 0$ et donc : $\boxed{\text{le vecteur } Q\,|V| - |V| \text{ est positif}}$.

II.B.5 Sommons... $\displaystyle\sum_{i=1}^{N}(Q\,|V| - |V|)_i = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} Q(i,j)\,|V|_j - \sum_{i=1}^{N}|V|_i$

En intervertissant les deux sommes (finies) dans le premier terme :

$\displaystyle\sum_{i=1}^{N}(Q\,|V| - |V|)_i = \sum_{j=1}^{N}|V|_j\sum_{i=1}^{N}Q(i,j) - \sum_{i=1}^{N}|V|_i = \sum_{j=1}^{N}|V|_j - \sum_{i=1}^{N}|V|_i = 0.$

On est en présence d'une somme de termes positifs (II.B.4) qui est égale à 0, donc tous les termes sont nuls : ainsi, pour tout $i \in [\![1,N]\!]$, $(Q\,|V|)_i = (|V|)_i$ et donc $Q\,|V| = |V|$: $\boxed{\text{le vecteur } |V| \text{ est invariant par } Q}$.

II.B.6 Reprenons : 1 est valeur propre de Q, donc **il existe** un vecteur V non nul (vecteur propre) tel que $QV = V$. Comme $|1| = 1$... on déduit de II.B.5. que $|V|$ est invariant par Q ; c'est un vecteur positif et comme V est non nul, $\|V\|_1 \neq 0$. Posons alors $V_\infty = \dfrac{|V|}{\|V\|_1}$.

V_∞ est invariant par Q (puisque colinéaire à $|V|$), positif, et $\|V_\infty\|_1 = \displaystyle\sum_{j=1}^{N}\frac{|V_j|}{\|V\|_1} = \frac{\sum_{j=1}^{N}|V_j|}{\sum_{j=1}^{N}|V_j|} = 1$ donc V_∞ est un vecteur de probabilité invariant par Q. Ce qui précède prouve qu' $\boxed{\text{il existe au moins un vecteur de probabilité invariant par } Q}$.

C. Unicité d'un vecteur de probabilité invariant

II.C.1 Si V est un vecteur positif invariant par Q, alors $QV = V$ et pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, $V_i \geq 0$. S'il existe $i \in [\![1, N]\!]$ tel que $V_i = 0$, alors $\sum_{j=1}^{N} Q(i,j)V_j = V_i = 0$ donc comme il s'agit d'une somme de termes tous positifs, chaque terme est nécessairement nul. Comme Q est strictement positive, on en déduit : $\forall j \in [\![1, N]\!]$, $V_j = 0$ et donc $V = 0_{\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})}$. Ainsi, $\boxed{\text{soit } V = 0_{\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})} \text{ soit } V \text{ est strictement positif}}$.

II.C.2 V_∞ n'est pas le vecteur nul car c'est un vecteur de probabilité et donc la somme de ses composantes doit faire 1.
Donc, avec II.C.1, $\boxed{V_\infty \text{ est strictement positif}}$.

II.C.3 Par définition, v_∞ et W_∞ sont invariants par Q, donc $QV = QW_\infty - \alpha QV_\infty = W_\infty - \alpha V_\infty = V$: $\boxed{V \text{ est invariant par } Q}$.

II.C.4 Pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, $V_i = (w_\infty)_i - \alpha(v_\infty)_i$, or par définition de α, pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, $\alpha \leq \dfrac{(w_\infty)_i}{(v_\infty)_i}$ et donc $(w_\infty)_i - \alpha(v_\infty)_i \geq 0$.
Ainsi, $\boxed{V \text{ est positif}}$.
De plus, avec les notations de l'énoncé, $V_{i_0} = (w_\infty)_{i_0} - \alpha(v_\infty)_{i_0} = 0$ donc $\boxed{V \text{ n'est pas strictement positif}}$.

II.C.5 On en déduit avec II.C.1. que $V = 0_{\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})}$ et donc que $\boxed{W_\infty = \alpha V_\infty}$.

II.C.6 Or $\|W_\infty\|_1 = \|V_\infty\|_1 = 1$: on en déduit que $|\alpha| = 1$ (puisque, de façon assez immédiate, $\|\alpha V_\infty\|_1 = |\alpha| \, \|V_\infty\|_1$), et comme α est un réel positif par définition, $\alpha = 1$. Donc $\boxed{W_\infty = V_\infty}$.

II.C.7 G est, d'après I.A, strictement positive et stochastique, et le système (S) consiste précisément à rechercher un vecteur de probabilité $\begin{pmatrix} p(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ p(N) \end{pmatrix}$ invariant par G (les $p(i)$, $i \in [\![1, N]\!]$, sont positifs et de somme 1 par hypothèse). Ce qui précède prouve l'unicité d'un tel vecteur lorsque la matrice est strictement positive et stochastique, donc $\boxed{\text{le système (S) définissant le PageRank admet bien une et une seule solution}}$.

II.C.8 $\boxed{\text{Pour tout } i \in [\![1, N]\!]}$, $p(i) = \sum_{j=1}^{N} G(i,j)p(j) = \sum_{j=1}^{N} \rho A(i,j)(i,j)p(j) + \sum_{j=1}^{N} \dfrac{1-\rho}{N} p(j) \geq \sum_{j=1}^{N} \dfrac{1-\rho}{N} p(j)$ puisque les termes de la première somme sont tous positifs. Donc $\boxed{p(i) \geq \dfrac{1-\rho}{N} \sum_{j=1}^{N} p(j) = \dfrac{1-\rho}{N}}$.

II.C.9 Pour $\rho = 1$, $G = A$ et $\boxed{G \text{ n'est plus strictement positive}}$. On peut par exemple, à l'extrême, prendre $A = I_N$ (aucune page Web ne pointe vers une autre page...) : il y a alors une $\boxed{\text{infinité de vecteurs de probabilité invariants par } G}$ (puisqu'il existe une infinité de vecteurs de probabilité : tous les vecteurs de la forme $\dfrac{V}{\|V\|_1}$ où V est un vecteur non nul et positif).

Partie III : Validation du PageRank

A. Valeurs propres de Q

III.A.1 Pour tout vecteur $V \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$, $\boxed{\|QV\|_1 = \sum_{i=1}^{N} \left| \sum_{j=1}^{N} Q(i,j)V_j \right| \leq \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} Q(i,j) |V_j| = \sum_{j=1}^{N} |V_j| \sum_{i=1}^{N} Q(i,j) = \sum_{j=1}^{N} |V_j| = \|V\|_1}$.
(on a utilisé les inégalités triangulaires, le fait que Q est positive et stochastique, et interverti deux sommes finies).
De plus, $\boxed{\text{lorsque } V \text{ est positif}}$, $\|QV\|_1 = \sum_{i=1}^{N} \left| \sum_{j=1}^{N} Q(i,j)V_j \right| = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} Q(i,j)V_j = \sum_{j=1}^{N} V_j \sum_{i=1}^{N} Q(i,j) = \sum_{j=1}^{N} V_j = \|V\|_1$ (puisque les termes de la somme sur j sont positifs, la somme est positive et donc égale à sa valeur absolue). Donc $\boxed{\|QV\|_1 = \|V\|_1}$.

III.A.2 Soit λ une valeur propre réelle de Q. Il existe un vecteur $V \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $QV = \lambda V$, et donc, d'après ce qui précède, $\|\lambda V\|_1 = |\lambda| \, \|V\|_1 \leq \|V\|_1$. Comme V est non nul, $\|V\|_1 > 0$ et donc $|\lambda| \leq 1$. Ainsi : $\boxed{\text{pour toute valeur propre réelle } \lambda \text{ de } Q, |\lambda| \leq 1}$.

III.A.3 Comme $|V| = V_\infty$, en particulier, $Q\,|V| = |V|$ et donc, si l'on regarde la première composante : $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} Q(1,j)\,|v_j| = |v_1|$. Or $QV = \lambda V$, donc $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} Q(1,j)v_j = \lambda v_1$ et comme $|\lambda| = 1$, $\displaystyle\left|\sum_{j=1}^{N} Q(1,j)v_j\right| = |v_1|$.

Finalement, on a bien : $\boxed{\displaystyle\left|\sum_{j=1}^{N} Q(1,j)\,v_j\right| = \sum_{j=1}^{N} Q(1,j)\,|v_j|}$.

III.A.4 D'après P.3, ceci implique que les $Q(1,j)\,v_j$, $j \in [\![1,N]\!]$ sont tous positifs, ou tous négatifs. Comme les $Q(1,j)$, $j \in [\![1,N]\!]$ sont **strictement** positifs, ceci implique que les v_j, $j \in [\![1,N]\!]$ sont tous positifs, ou tous négatifs.
Donc $V = \pm|V|$: $\boxed{V \text{ est bien colinéaire à } |V|}$.
De plus, $QV = \lambda V$ donc $Q\,|V| = \lambda\,|V|$ (puisque V et $|V|$ sont colinéaires). Comme $Q\,|V| = |V|$, on a donc $(\lambda - 1)\,|V| = 0_{\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})}$.
$|V|$ n'étant pas le vecteur nul, on en déduit : $\boxed{\lambda = 1}$.

B. Convergence

III.B.1 Par hypothèse, Q est diagonalisable, donc $\boxed{\text{il existe une matrice diagonale } D \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}) \text{ et une matrice inversible } S \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})}$, $\boxed{\text{telles que}}$ $Q = SDS^{-1}$. De plus, si pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, $Q^n = SD^nS^{-1}$, alors $Q^{n+1} = QQ^n = SDS^{-1}SD^nS^{-1} = SD^{n+1}S^{-1}$.
On conclut par principe de récurrence que : $\boxed{\text{pour tout } n \geq 1,\ Q^n = SD^nS^{-1}}$.

III.B.2 On a vu en II.B que 1 est valeur propre, en III.A que les valeurs propres de Q sont toutes de valeur absolue inférieure ou égale à 1, et que si $|\lambda| = 1$, alors $\lambda = 1$ et de plus, tout vecteur propre V associé à λ est colinéaire à V_∞ (en fait, ce que l'on a montré exactement, c'est que $\dfrac{V}{\|V\|_1} = \pm V_\infty$). Donc : 1 est valeur propre de Q et son sous-espace propre associé est de dimension 1, et toutes les autres valeurs propres de Q sont de valeur absolue strictement inférieure à 1. Ce qui prouve bien que :
$\boxed{\text{parmi les } N \text{ coefficients diagonaux de } D, \text{ un et un seul est égal à 1 alors que les autres sont de valeur absolue strictement inférieure à 1}}$.

III.B.3 Choisissons S et D de manière à ce que $D = \mathrm{diag}(1, \lambda_2, ..., \lambda_N)$ avec $\forall i \in [\![2,N]\!],\ |\lambda_i| < 1$.
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D^n = \mathrm{diag}(1, \lambda_2^n, ..., \lambda_N^n)$ et donc (D_n) converge vers la matrice $D_\infty = \mathrm{diag}(1, 0, ..., 0)$.
Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle(Q^n)_{ij} = \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} S_{ik}(D^n)_{kl}(S^{-1})_{lj} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} S_{ik}(D_\infty)_{kl}(S^{-1})_{lj} = (SD_\infty S^{-1})_{ij}$, la suite $(Q^n)_{n\geq1}$ converge vers la matrice $SD_\infty S^{-1}$. Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (Q^n)_{n\geq1} \text{ converge bien vers une matrice } Q_\infty}$ (avec $Q_\infty = SD_\infty S^{-1}$).

III.B.4 Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$: $Q^1 = Q$ est stochastique et si pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, Q^n est stochastique, alors pour tout $(i,j) \in [\![1,N]\!]^2$, $\displaystyle(Q^{n+1})_{ij} = \sum_{k=1}^{N} Q_{ik}(Q^n)_{kj} \geq 0$ en tant que somme de termes positifs (Q et Q^n sont stochastiques) et pour tout $j \in [\![1,N]\!]$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{N}(Q^{n+1})_{ij} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} Q_{ik}(Q^n)_{kj} = \sum_{k=1}^{N}(Q^n)_{kj}\sum_{i=1}^{N} Q_{ik} = 1 \times 1 = 1$ puisque Q et Q^n sont stochastiques. Donc Q^{n+1} est stochastique, ce qui achève la récurrence : $\boxed{\text{pour tout } n \geq 1,\ Q^n \text{ est stochastique}}$.
Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(Q^n)_{ij} \geq 0$, par passage à la limite : $(Q_\infty)_{ij} \geq 0$.
De même, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{N}(Q^n)_{ij} = 1$, donc par passage à la limite (somme finie) : $\displaystyle\sum_{i=1}^{N}(Q_\infty)_{ij} = 1$.
Ainsi : $\boxed{Q_\infty \text{ est stochastique}}$.

III.B.5 Avec les notations précédemment introduites, $QQ_\infty = SDS^{-1}SD_\infty S^{-1} = SDD_\infty S^{-1} = SD_\infty S^{-1} = Q_\infty$
(en effet, $\mathrm{diag}(1, \lambda_2, ..., \lambda_N)\mathrm{diag}(1, 0, ..., 0) = \mathrm{diag}(1, 0, ..., 0)$). Donc $\boxed{QQ_\infty = Q_\infty}$.

III.B.6 Ceci prouve précisément que $\boxed{\text{chacun des vecteurs colonnes de } Q_\infty \text{ est invariant par } Q}$.
(en effet, si C_j est le $j$ème vecteur colonne de Q_∞, la relation $QQ_\infty = Q_\infty$ implique $QC_j = C_j$...)

III.B.7 Q_∞ étant stochastique, ses vecteurs colonnes sont des vecteurs de probabilité... Or le seul vecteur de probabilité invariant par Q est V_∞ d'après II.C. On peut donc conclure :

$$\boxed{(Q^n)_{n\geq1} \text{ converge, lorsque } n \text{ tend vers l'infini, vers la matrice } Q_\infty \text{ dont les vecteurs colonnes sont tous égaux à } V_\infty}.$$

C. Application au modèle du surfeur

III.C.1 On a vu en I.B que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V^n = G^n V_0$ et avec le résultat admis, $(G^n)_{n \geq 1}$ converge, lorsque n tend vers l'infini, vers la matrice G_∞ dont les vecteurs colonnes sont tous égaux à V_∞. De plus, si on note E_1, ..., E_N les vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire : pour tout $(i,j) \in [\![1,N]\!]^2$, $(E_j)_i = 1$ si $i = j$ et $(E_j)_i = 0$ sinon), pour tout $j \in [\![1,N]\!]$, $G_\infty E_j$ est égal à la $j$ème colonne de G_∞, et donc à V_∞.

Comme $V_0 = \sum_{j=1}^{N} (V_0)_j E_j$, on a alors : $G_\infty V_0 = \sum_{j=1}^{N} (V_0)_j V_\infty = V_\infty$ puisque $\sum_{j=1}^{N} (V_0)_j = 1$.

Donc $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le vecteur V_∞, dont les composantes sont précisément les $p(j) = P(X_\infty = j)$, $j \in [\![1,N]\!]$.

Ainsi : $\boxed{(X_n)_{n \geq 0} \text{ converge en loi vers } X_\infty \text{ lorsque } n \text{ tend vers l'infini}}$.

III.C.2 Ce résultat donne effectivement du sens à l'assertion un peu vague: « le PageRank d'une page donnée représente la chance qu'un internaute se retrouve sur la page en question lorsqu'il surfe », puisque le pagerank correspond à la probabilité que l'internaute arrive sur une page donnée (au bout d'un nombre suffisamment important de clics), quelle que soit sa page de départ.