Devoir Maison n° 3

À rendre le 04/10/23

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, par

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x^2} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Etude de f

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.
3. Etudier la dérivabilité de f sur son ensemble de définition, et calculer, pour $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x)$. Montrer que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.
4. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un ensemble à déterminer.
5. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition, dresser le tableau de variation puis construire sa courbe représentative. On placera la tangente à l'originie.

Etude de $f(x) - x$.

Soit g la fonction définie sur $[0;1]$ par $g(x) = f(x) - x$.

6. Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0;1]$, puis calculer $g'(x)$ et $g''(x)$.
7. Déterminer le signe de $g'(x)$ puis celui de $g(x)$ sur $[0;1]$. (On donne $f'\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \simeq 0,82$).

Etude d'une suite

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$, et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

8. Ecrire une fonction Python `suite(n)` qui renvoie, pour n donné, la valeur de u_n.
9. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in]0;1[$.
10. En déduire que la suite (u_n) est strictement croissante, et qu'elle converge. Déterminer sa limite.

Etude d'une suite implicite

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit la fonction h_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h_n(x) = xf\left(\sqrt{\frac{|x|}{n}}\right)$$

11. Montrer qu'il existe un unique réel positif α_n tel que $h_n(\alpha_n) = 1$.
12. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, α_n est strictement supérieur à 1, et que α_n est solution de

$$(E_n): \qquad x\ln(x) = n$$

13. Etudier la fonction φ définie sur $[1;+\infty[$ par $\varphi(x) = \ln(x)$. En déduire, en utilisant φ^{-1} (dont on justifiera l'existence), que

$$\lim_{n \to +\infty} \alpha_n = +\infty$$

14. Justifier la relation $\ln(\alpha_n) + \ln(\ln(\alpha_n)) = \ln(n)$, puis montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(\alpha_n)}{\ln(n)} = 1$$

15. En déduire un équivalent de α_n.