Devoir Surveillé n° 0

Le 14/09/23 **Durée : 4 heures**

QUESTIONS DE COURS :

Répondre directement sur ce document.

Fonctions

Propriétés, Opérations

- Soit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$. Alors :

$$\mathrm{e}^{a+b} = \qquad \mathrm{e}^{a-b} =$$

$$\frac{1}{\mathrm{e}^a} = \qquad (\mathrm{e}^a)^n =$$

- Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{Z}$. Alors :

$$\ln ab = \qquad \ln \frac{a}{b} =$$

$$\ln \frac{1}{b} = \qquad \ln a^n =$$

- $$|x| = \begin{cases} & \\ & \end{cases}$$

- Soient x, y deux réels et n un entier naturel.
  - $|xy| =$
  - $|x^n| =$
  - Si $y \neq 0$, $\left|\frac{x}{y}\right| =$

  Soient x, y deux réels et ε un réel strictement positif.
  - $|x| \leq \varepsilon \iff$
  - $|x| = |y| \iff$.
  - $|x| \geq \varepsilon \iff$.
  - $|x| = \varepsilon \iff$.

- Soit $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}_+$ (non nul si nécessaire). Alors :

$$\sqrt{ab} = \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} =$$

  De plus, pour x un réel :

$$\sqrt{x^2} =$$

- Soit a, b des réels (non nuls si nécessaire), $n \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{Z}$. Alors :

$$(ab)^n = \qquad \frac{1}{a^n} = \qquad (a^n)^m =$$

  et

$$a^n a^m = \qquad \frac{a^n}{a^m} =$$

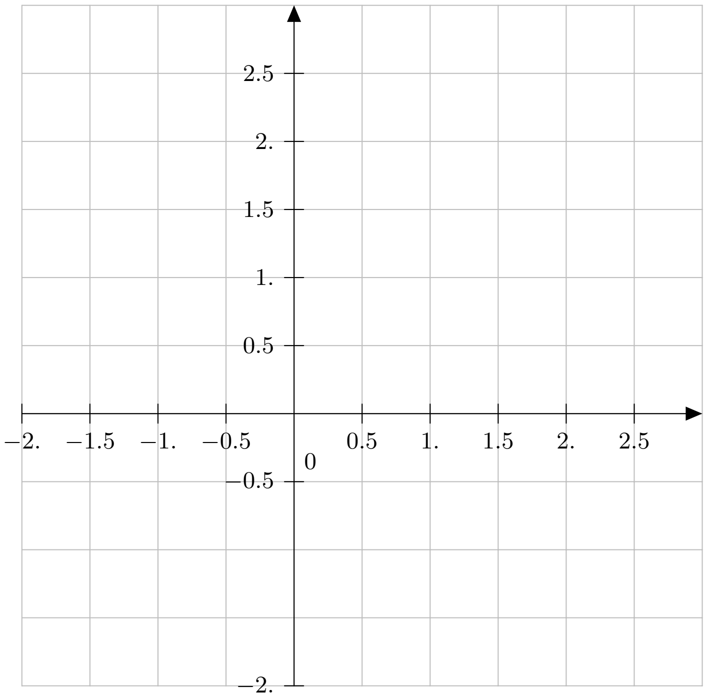
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\leq \lfloor x \rfloor <$$

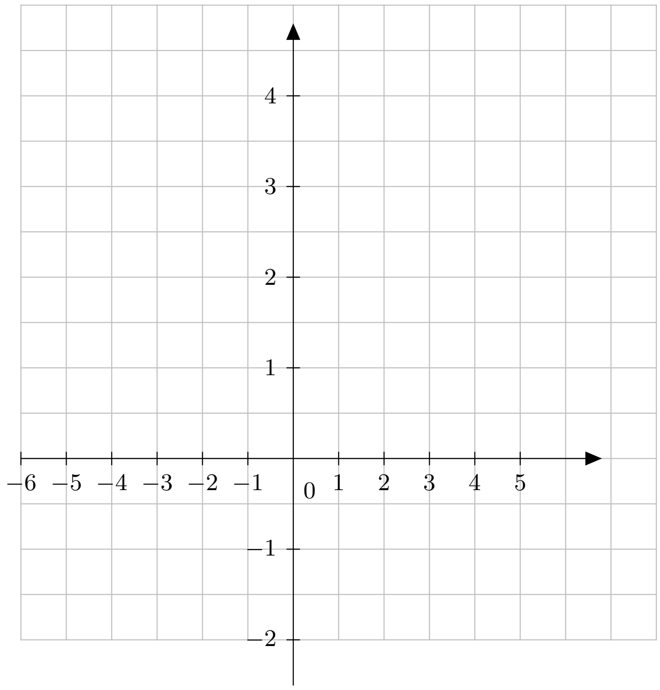
Représentations graphiques

Tracer les graphes des fonctions usuelles en mettant en évidence des points particuliers, asymptotes éventuelles. Faire bien attention à la position relative des courbes autour du point $(1, 1)$ dans le cas des puissances.

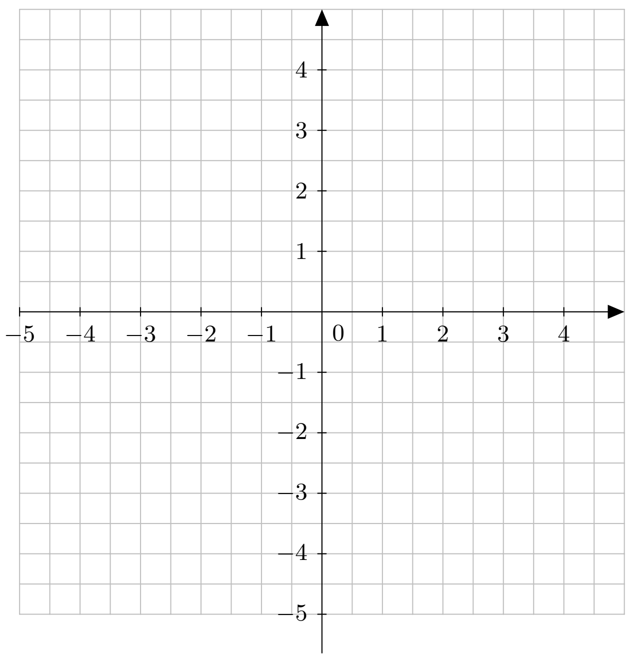
Représentation graphique des fonctions carré, cube et racine



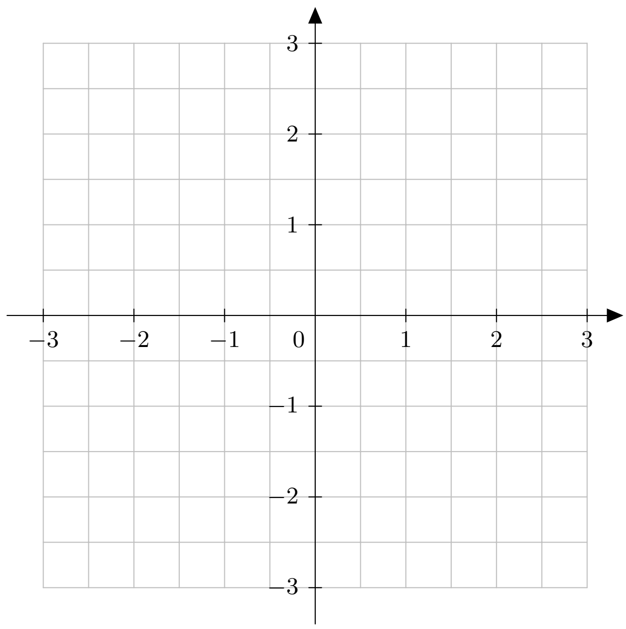
Représentation graphique des fonctions exponentielle et logarithme



Représentation graphique de la fonction valeur absolue



Représentation graphique de la fonction partie entière



Dérivées

Fonction f	D_f	$f'(x)$	$D_{f'}$
$x \longrightarrow k \quad (k \in \mathbb{R})$			
$x \longrightarrow x^n \quad (n \in \mathbb{N})$			
$x \longrightarrow x^{-n} \quad (n \in \mathbb{N})$			
$x \longrightarrow x^\alpha,\ \alpha \in]0,+\infty[$			
$x \longrightarrow \mathrm{e}^x$			
$x \longrightarrow \ln(x)$			

$(u+v)' =$	$(uv)' =$
$\left(\frac{1}{u}\right)' =$	$\left(\frac{u}{v}\right)' =$

Fonction	**Dérivée**	**Conditions**
$f = u^n$	$f' =$	$n \in \mathbb{N}$
$f = \frac{1}{u^n} = u^{-n}$	$f' =$	$\forall x \in I, u(x) \neq 0$
$f = u^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$f' =$	$\forall x \in I, u(x) > 0$
$f = \sqrt{u}$	$f' =$	$\forall x \in I, u(x) > 0$
$f = \ln(u)$	$f' = \dfrac{u'}{u}$	$\forall x \in I, u(x) > 0$
$f = \ln\|u\|$	$f' =$	$\forall x \in I, u(x) \neq 0$
$f = \mathrm{e}^u$	$f' =$	

L'équation de la tangente au point d'abscisse a est :

$$y =$$

Primitives

Compléter les tableaux de primitives suivant. On admet que $n \in \mathbb{N}$ ou $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ (selon les cas), et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Préciser les intervalles de dérivation dans le premier tableau.

la fonction f	admet pour primitive F	sur I
$f(x) = x^n$	$F(x) =$	
$f(x) = 1/x^n$	$F(x) =$	ou
$f(x) = x^\alpha$	$F(x) =$	
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) =$	ou

la fonction f	admet pour primitive F
$u' \times u^\alpha$	
$\frac{u'}{u}$	
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	
$u' \times e^u$	

Limites

Théorème 0.1 (Croissances comparées)

Soient α et β deux réels strictement positifs et $n \in \mathbb{N}$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x^\beta} =$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^\alpha}{\mathrm{e}^{\beta x}} =$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{\ln^\beta(x)} =$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln^\alpha(x)}{\mathrm{e}^{\beta x}} =$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^\alpha}{\ln^\beta(x)} =$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln^\alpha(x)}{x^\beta} =$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} x^n \ln(x) =$

Théorème 0.2 (Taux d'accroissement)

Limites usuelles à connaître

- $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} =$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} =$
- $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} =$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} =$

Suites, sommes et séries

Théorème 0.3

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{R}$.

- $\sum_{k=0}^{n} k =$
- $\sum_{k=0}^{n} k^2 =$
- $\sum_{k=0}^{n} k^3 =$
- $\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \begin{cases} & \text{si} \quad q = 1 \\ & \text{si} \quad q \neq 1 \end{cases}$

La somme des termes d'une suite géométrique peut être généralisée. Soit $n, p \in \mathbb{N}$, et $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Alors

$$\sum_{k=p}^{n} q^k =$$

- Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmétique de raison r et p, n deux entiers naturels avec $p \leq n$.
  On a alors :
  $$\sum_{k=p}^{n} u_k = \qquad .$$
- Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite géométrique de raison q et p et n deux entiers naturels avec $p \leq n$.
  - Si $q \neq 1$, on a $\sum_{k=p}^{n} u_k =$
  - Si $q = 1$, on a : $\sum_{k=p}^{n} u_k =$
- Compléter les formules des sommes de séries suivantes, et préciser si besoin les conditions de convergence :
  - $\sum_{k=0}^{n} q^k =$ si
  - $\sum_{k=2}^{n} k(k-1)q^{k-2} =$ si
  - $\sum_{k=1}^{n} kq^k =$ si
  - $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} =$
- Donner la définition d'une série de Riemann, et dire à quelle condition elle converge.

Probabilités

Théorème 0.4 (Formule des probabilités composées)

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ un espace probabilisé fini. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ et $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n événements avec $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors :

$$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) =$$

Théorème 0.5 (Formule des probabilités totales)

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements. Soit B un évènement.

- On a : $P(B) =$.
- Si de plus pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$, $P(A_i) \neq 0$ alors :

$$P(B) =$$

Théorème 0.6 (Formule de Bayes)

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathrm{P})$ un espace probabilisé fini.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements. Soit B un événement. On suppose que tous ces événements ont une probabilité non nulle.
On a alors pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$:

$$\mathrm{P}_B(A_i) =$$

Lois usuelles

Compléter le tableau des lois usuelles discrètes :

Nom	Notation	$X(\Omega)$	Loi	Espérance	Variance
Bernoulli	$\mathcal{B}(p)$	$\{0,\ 1\}$	$\mathrm{P}(X=1) =$ et $\mathrm{P}(X=0) =$		
Uniforme sur $[\![1,\ n]\!]$					
Uniforme sur $[\![a,\ b]\!]$					
Binomiale de paramètres n et p					
Loi géométrique de paramètre p					
Loi de Poisson de paramètre λ					

Polynômes

Proposition 0.7

Soit $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$.

$$\deg(P+Q) \leq \qquad\qquad \deg(PQ) =$$

Théorème 0.8

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et le polynôme $P(X) = aX^2 + bX + c$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, P admet deux racines simples $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et se factorise de la manière suivante :
  $P(X) =$.
- Si $\Delta = 0$, P admet une racine double $x_0 = -\frac{b}{2a}$ et se factorise de la manière suivante :
  $P(X) =$.

Proposition 0.9 (Relations coefficients - racines)

Soit $P(X) = aX^2 + bX + c$ un trinôme admettant deux racines x_1 et x_2. On a les relations suivantes :

$$x_1 + x_2 = \qquad \text{et} \qquad x_1 x_2 =$$

Coefficients binomiaux

Théorème 0.10 (Formule du triangle de Pascal)

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ avec $1 \leqslant p \leqslant n$. On a :

$$\binom{n}{p} =$$

Théorème 0.11 (Expresion à l'aide de factorielles)

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leqslant n$. On a :

$$\binom{n}{p} =$$

Théorème 0.12 (Formule du binôme de Newton)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$(a+b)^n =$$

Calculs

Répondre sur une copie

Tous les calculs devront être justifiés avec autant de précision que l'année dernière.

1. Calculer si elles existent les limites suivantes
   (a) $\dfrac{1+x+\mathrm{e}^x}{1+\sqrt{x}}$ en $+\infty$.
   (b) $\dfrac{x-3}{x^2-6x+9}$ en 3, il faudra peut être distinguer 3^+ et 3^-.
   (c) $\dfrac{\mathrm{e}^x+\ln x}{x^2+x}$ en $+\infty$.
   (d) $\dfrac{\ln(1+x)}{\mathrm{e}^x-1}$ en 0.
   (e) $\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n^2}$ en $+\infty$.
2. Calculer les intégrales suivantes
   (a) $I_1 = \displaystyle\int_1^2 \ln x \,\mathrm{d}x$
   (b) $I_2 = \displaystyle\int_0^1 (x+1)\mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x$
   (c) $I_3 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{3+\mathrm{e}^{-x}} \,\mathrm{d}x$ on pourra poser $u = \mathrm{e}^x$
   (d) $I_4 = \displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$
3. **Sans** étudier l'ensemble de dérivabilité des fonctions suivantes, calculer leur dérivées.
   (a) $f\ : x \mapsto \ln(1+x^2)$
   (b) $g\ : x \mapsto x^2\mathrm{e}^x$
   (c) $h\ : x \mapsto \sqrt{1+\ln x}$
4. Résoudre les équations et les inéquations suivantes.
   (a) $|x+1| \geqslant |x-2|$
   (b) $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} = 5$
   (c) $\sqrt{x} + \dfrac{2}{\sqrt{x}} = 3$

Exercice

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Déterminer $(A-I)^2$.
   (b) En déduire que A est inversible et écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I et A.
2. On pose $A = N + I$.
   (a) Exprimer pour tout entier naturel n, la matrice A^n comme combinaison linéaire de I et N, puis l'écrire comme binaison linéaire de I et A.
   (b) Vérifier que l'expression précédente est aussi valable pour $n = -1$.
3. **Question réservée aux khubes**
   (a) Déterminer l'unique valeur propre possible de A, et vérifier qu'elle est bien valeur propre.
   (b) La matrice A est-elle diagonalisable.
4. On note $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On introduit $u_1 = (A-I)e_1$ et $u_2 = e_1 + e_3$.
   (a) Déterminer le rang de $A - I$.
   (b) Justifier que (u_1, u_2) forme une base de $Ker(A-I)$.
   (c) Montrer que la famille (u_1, u_2, e_1) forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
5. Justifier que la matrice P ci-dessous est inversible, calculer son inverse ainsi que la matrice T telle que $A = PTP^{-1}$.

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Problème

On considère une urne contenant une boule noire et trois boules blanches. On effectue le jeu suivant :

- On commence par piocher des boules de l'urne une à une, avec remise, jusqu'à l'obtention de la boule noire (que l'on remet dans l'urne). On définit la variable aléatoire N égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la boule noire.
- Puis, lorsque N prend une valeur entière positive non nulle notée n, on réalise alors une seconde série de n tirages dans l'urne, toujours avec remise. On définit la variable X égale au nombre de fois où la boule noire a été obtenue dans cette seconde série de tirages.

On **admet**, dans un premier temps, l'égalité $\boxed{\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}}$ valable pour $x \in]-1;1[$ et $k \in \mathbb{N}$. La démonstration de cette égalité fera l'objet d'une quatrième et dernière partie (partie plus difficile réservée aux étudiant.e.s averti.e.s).

Partie I : Lois de N et de X.

1. (a) Reconnaître la loi de la variable aléatoire N en justifiant votre réponse. Donner son univers, l'expression de $P(N = n)$, puis l'espérance et la variance de N.
   (b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$. Justifier que : $\mathrm{P}_{[N=n]}(X = k) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k > n \\ \binom{n}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{n-k} & \text{si} \quad 0 \leq k \leq n \end{cases}$
   (c) Vérifier, à l'aide de la formule des probabilités totales, que $P(X = 0) = \dfrac{3}{7}$.

2. (a) Montrer, toujours avec la formule de probabilités totales, que pour tout entier k non nul, on a :

$$P(X=k)=\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{9}{16}\right)^{n}$$

   (b) En déduire que pour tout entier k non nul, $P(X=k)=\dfrac{16}{21}\left(\dfrac{3}{7}\right)^{k}$.

3. Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}P(X=k)=1$.
4. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

Partie II : Simulation avec Python

5. Recopier et compléter la fonction Python suivante qui permet de simuler le couple (N,X) :

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul_NX():
        N=1
        while rd.rand() ...
                ...
        X=rd.binomial(...,...)
        return [N,X]
```

6. On ajoute les instructions suivantes :

```python
ech=[]
for k in range(10000):
        [n,x]=simul_NX()
        ech.append(x)
print(np.mean(ech))
```

En exécutant le programme, on obtient :

```
> > >
1.0185
```

Commet interpréter cet affichage ? Est-ce cohérente avec ce qui précède ?

Partie III : Première étapde en double et loi du max

Dans cette partie, le protocole reste le même, sauf **qu'on effectue deux fois la première étape**.

On note alors N_1 le nombre de tirages nécessaire pour obtenir la boule noire lors de la première fois où la première étape est réalise, et N_2 pour la seconde fois. Les variables N_1 et N_2 sont alors indépendantes.

On pose à présent $N=\max(N_1,N_2)$, la plus grande des deux valeurs. A l'issue de ce protocole, X est définie comme auparavant : si N prend la valeur n, X compte le nombre de fois où la boule noire a été obtenue lors d'une nouvelle série de n tirages.

7. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $\mathrm{P}(N_1\leq n)=1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n}$.
8. Justifier que, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathrm{P}(N\leq n)=\mathrm{P}([N_1\leq n]\cap[N_2\leq n])$ et en déduire l'expression de $\mathrm{P}(N\leq n)$.

9. Soit $n \geq 2$, exprimer $\mathrm{P}(N = n)$ en fonction de $\mathrm{P}(N \leq n)$ et de $\mathrm{P}(N \leq n-1)$. Vérifier que cette relation reste valabre pour $n = 1$.
10. En déduire, en développant l'expression précédente, que : $\mathrm{P}(N = n) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1} - \dfrac{7}{16}\left(\dfrac{9}{16}\right)^{n-1}$.
11. Vérifier que N admet une espérance et que $E(N) = \dfrac{40}{7}$.

Partie IV : Démonstration de la formule admise

12. Rappeler la formule du triangle de Pascal.
13. Soit $m \in \mathbb{N}$ fixé. Montrer par récurrence que $\forall q > m$, $\displaystyle\sum_{k=m}^{q} \binom{k}{m} = \binom{q+1}{m+1}$.
14. Soit k un entier naturel non nul, et $(X_n)_{n\text{ß}\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, suivant toutes la loi géométrique de paramètre $1-x$, avec $x \in]0;1[$, et on pose

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i = X_1 + X_2 + ... + X_k$$

   (a) Déterminer $S_k(\Omega)$ puis établir que, $\forall n \geq k+1$, on a :

$$P(S_{k+1} = n) = \sum_{j=k}^{n-1} \mathrm{P}([S_k = j] \cap [X_{k+1} = n-j])$$

   (b) En déduire, par récurrence sur k, que $\forall n \geq k$, $\quad P(S_k = n) = \dbinom{n-1}{k-1}(1-x)^k x^{n-k}$.

   (c) En déduire, pour $x \in]0;1[$ et $k \in \mathbb{N}^*$, que : $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n-1}{k-1} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^k}$.

   (d) Conclure

Bonus

On dispose du programme ci-dessous. Que va renvoyer `mystère(8973)`

```
import numpy as np


def taille(x):
        l=0
        while x/(10**l)>=1:
                l=l+1
        return l


def mystere(x):
        n=taille(x)
        L=np.zeros(n)
        for k in range(n,0,-1):
                L[k-1]=np.floor(x/10**(k-1))
                x=x-L[k-1]*10**(k-1)
        y=0
        for j in range(0,n):
                y+=L[j]*10**(n-1-j)
        return y
```