Correction du DM n° 3

Le 04/10/23

1. La fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, la fonction exp est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc par composition , f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
   En particulier f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. Comme

   $$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty et \lim_{x\to -\inf} e^x = 0$$

   On en déduit par composition que

   $$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$$

   Donc f est continue en 0. Ainsi f est bien continue sur $\mathbb{R}$.
2. On calcule le taux d'accroissement de f en 0. Pour $x \neq 0$:

   $$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{e^{-1/x^2}}{x}$$

   On pose $u = 1/x^2$, alors $\dfrac{e^{-1/x^2}}{x} = \dfrac{\pm\sqrt{u}}{e^u}$. Par croissances comparées, on montre que

   $$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{u\to+\infty} \frac{\pm\sqrt{u}}{e^u} = 0$$

   Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
3. Comme f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, en particulier f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

   $$\forall x \in R^*, \qquad f'(x) = \frac{2}{x^3} f(x)$$

   On gardant le changement $u = 1/x^2$

   $$-\frac{2}{x^3} e^{-1/x^2} = \frac{\pm 2u^{3/2}}{e^u}$$

   Par croissances comparées, on montre alors que

   $$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{u\to+\infty} \frac{\pm u^{3/2}}{e^u} = 0 = f'(0)$$

   Donc f' est continue en 0 et f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
4. Comme pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ $f(x) \geq 0$, alors $f'(x) \geq 0$ et ne s'annule qu'en 0. Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme elle est continue, le théorème de la bijection nous assure alors que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $f(R_+)$.
   Comme

   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = e^0 = 1$$

   f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $[0, 1[$.
5. Nous venons de calculer la limite en $+\infty$. La limite en $-\infty$ donne également

   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = e^0 = 1$$

On obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	1	↘	0	↗	1

La tangente en 0 a pour équation

$$y = f'(0)x + f(0) = 0$$

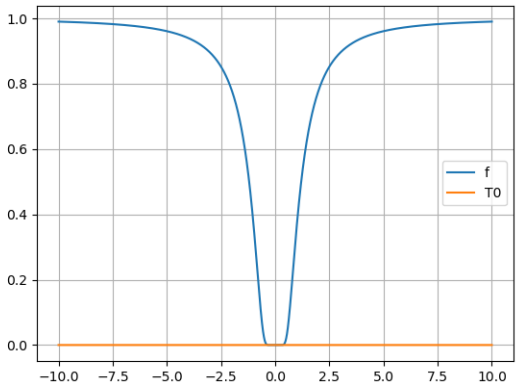
On tape dans Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):
        if x==0:
                return(0)
        else:
                return(np.exp(-1/(x**2)))

f1=np.vectorize(f)
x=np.linspace(-10,10,10000)
y=f1(x)
plt.plot(x,y,label='f')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```

On obtient la représentation graphique suivante :



6. Comme f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, g est en particulier de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,1]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

$$\forall x \neq 0, \qquad g'(x) = f'(x) - 1 \qquad g''(x) = f''(x) = -\frac{6}{x^4}e^{-1/x^2} + \frac{4}{x^6}e^{-1/x^2} = \frac{4-6x^2}{x^4}e^{-1/x^2}$$

$$\frac{g'(x) - g'(0)}{x} = \frac{\frac{2}{x^3}e^{-1/x^2} - 1 - (-1)}{x} = \frac{2e^{-1/x^2}}{x^4}$$

Le même changement de varible que précédemment montre que, par croissances comparées, $g''(0)$ existe et vaut 0, et que

$$\lim_{x\to 0} -\frac{6}{x^4}e^{-1/x^2} + \frac{4}{x^3}e^{-1/x^2} = 0 = g''(0)$$

On montre ainsi que g est de classe $\mathcal{C}^2$ en 0 et donc $\boxed{g \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } [0,1].}$

7. Sur l'intervalle $[0,1]$, l'expression $g''(x)$ est du signe de $4-6x^2$, à avoir négative sur $\left[\sqrt{\frac{2}{3}};1\right]$, positive sur $\left[0;\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$.

   Dès lors, la fonction g' est croissante $\left[0;\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$ et décroissante sur $\left[\sqrt{\frac{2}{3}};1\right]$. Or d'après l'énoncé, $f'\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \simeq 0.82$, en pariculier $g'\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) < 0$, donc g' est négative sur $[0,1]$,et g est décroissante. Comme $g(0)=0$, la fonction g est également négative sur $[0,1]$.

8.
```
import numpy as np

def suite(n):
        u=3
        for k in range(n):
                u=np.exp(-1/(u**2))
        return(u)
```

9. On raisonne par récurrence.

   Initialisation :

   Pour $n=1$, on a $u_1 = f(3) = e^{-1/3}$, donc $u_1 \in]0,1[$.

   Hérédité :
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $u_n \in]0,1[$. Montrons que $u_{n+1} \in]0,1[$.

   En partant de l'hypothèse de récurrence et en appliquant la fonction stricte croissance de f, on trouve

   $$f(0) < u_{n+1} < f(1)$$

   soit

   $$0 < u_{n+1} < e^{-1}$$

   donc $u_{n+1} \in]0,1[$.

   Hérédité :
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in]0,1[$.

10. Comme, d'après la question 7, on a pour tout $x \in [0,1]$, $g(x)$ négative, et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in]0,1[$, on peut remplacer x par u_n, et obtenir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

    $$g(u_n) \leq 0 \Leftrightarrow f(u_n) \leq u_n \Leftrightarrow u_{n+1} \leq u_n$$

    et comme $u_1 \leq u_0$, on a bien $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante.

    Comme elle est minorée, le théorème de la limite monotone nous assure qu'elle converge vers un réel $\ell \in [0,1]$.

    Comme la fonction f est continue sur $[0,1]$, le théorème du point fixe renvoie que ℓ est solution de l'équation $f(x)=x$, ou encore $g(x)=0$. Donc d'après la question 7,

    $$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

11. La fonction h_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$, et comme pour tout $x>0$, $h_n(x) = xe^{-n/x}$:

    $$h_n'(x) = \left(1+\frac{n}{x^2}\right)e^{-n/x} \qquad h_n'(0) = 0$$

    La fonction h_n est donc strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $[0;+\infty[$ ($\lim\limits_{x\to+\infty} h_n(x) = +\infty$. Comme $1 \in f(\mathbb{R}_+)$, le théorème de la bijection nous dit qu'il existe un $\alpha_n \in \mathbb{R}_+$, tel que $h_n(\alpha_n) = 1$.

12. Comme $h_n(1) = e^{-n} < 1$, c'est à dire $h_n(1) < h_n(\alpha_n)$, la stricte croissance de h_n nous assure que $\alpha_n > 1$.
Par ailleurs,
$$h_n(\alpha_n) = 1 \Leftrightarrow \alpha_n e^{-n\alpha_n} = 1 \Leftrightarrow \ln(\alpha_n) - \frac{n}{\alpha_n} = 0 \Leftrightarrow \alpha_n \ln(\alpha_n) = n$$

13. La fonction $\varphi : x \mapsto x\ln(x)$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[1;+\infty[$ comme produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[1;+\infty[$.
Pour tout $x \geq 1$
$$\varphi'(x) = 1 + \ln(x) > 0$$
, donc φ est strictement croissante sur $[1;+\infty[$ donc d'après le théorème de la bijection, elle est bijective de $[1;+\infty[$ dans $\mathbb{R}_+$.
De plus, comme vu précédemment
$$\alpha_n \ln(\alpha_n) = n \qquad \text{ou encore } \alpha_n \varphi^{-1}(n)$$
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi^{-1}(n) = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = +\infty$.

14. On applique la fonction ln à l'expression trouvée à la question 12 :
$$\ln(\alpha_n) + \ln(\ln(\alpha_n)) = \ln(n)$$
On en déduit que
$$\frac{\ln(\alpha_n)}{\ln(n)} = 1 - \frac{\ln(\ln(\alpha_n))}{\ln(n)}$$
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(\alpha_n)}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\alpha_n} = 0$, donc $\ln(\alpha_n)+\infty=o(n)$ De plus $\ln(x) \underset{+\infty}{=} o(x)$ par croissances comparées, et comme α_n tend vers $+\infty$,
$$\ln(\ln(\alpha_n)) \underset{+\infty}{=} o(\ln(\alpha_n))$$
ou encore
$$\ln(\ln(\alpha_n)) \underset{+\infty}{=} o(n)$$
Donc
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(\alpha_n)}{\ln(n)} = 1$.

15. On en déduit que $\ln(\alpha_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$, et comme $\alpha = \dfrac{n}{\ln(\alpha_n)}$, $\alpha_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n}{\ln(n)}$.