EDHEC 2014 voie E

Exercice 1

On note I la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

1. (a) Montrer, grâce à la méthode du pivot de Gauss, que les valeurs propres λ de A sont les solutions de l'équation : $\lambda^3 - 9\lambda^2 - 27\lambda + 53 = 0$. (*Montrer que* $A - \lambda I_3$ *est inversible si et seulement si* $\lambda^3 - 9\lambda^2 - 27\lambda + 53 \neq 0$.)
   (b) Etudier la fonction f qui, à tout réel x associe $f(x) = x^3 - 9x^2 - 27x + 53$, puis dresser son tableau de variation (on précisera les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$, on notera m le minimum local de f sur $\mathbb{R}$, M le maximum local de f sur $\mathbb{R}$ et on ne cherchera ni à calculer m, ni à calculer M).
   (c) Calculer $f(0)$ et $f(3)$ puis déterminer les signes de m et M.
   (d) Montrer que A admet trois valeurs propres, que l'on ne cherchera pas à calculer et que l'on notera λ_1, λ_2 et λ_3 avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.
   (e) (*)En déduire qu'il existe une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$, avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.
2. L'objectif de cette question est de déterminer l'ensemble E des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent ave A, c'est à dire qui vérifient : $AM = MA$.
   (a) Montrer que les matrices qui commutent avec D sont des matrices diagonales.
   (b) Montrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :
      i. M est une matrice de E
      ii. $P^{-1}MP$ commute avec D
   (c) Etablir que toute matrice M de E est combinaison linéaire des trois matrices suivantes :
   $$P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$
   (d) En déduire que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.
   (e) Montrer, en raisonnant sur les valeurs propres de A, qu'il n'existe aucun polynôme annulateur non nul de A qui soit de degré inférieur ou égal à 2. En déduire que (I, A, A^2) est une base de E.

Exercice 2

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt$ est définie pour tout réel x. On considère désormais la fonction f définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt$$
2. Etablir que f est impaire.
3. (a) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
   (b) Déterminer $f'(x)$, pour tout réel x, et en déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
4. (a) En utilisant la relation $t^2 \leqslant t^2 + 1 \leqslant t^2 + 2t + 1$, valable pour tout t réel positif ou nul, montrer que l'on a l'encadrement suivant:
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(2x+1) - \ln(x+1) \leqslant f(x) \leqslant \ln(2)$$
   (b) Donner alors la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   (c) Dresser le tableau de variation complet de f.
   (d) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
5. (a) Montrer que pour tout réel x, on a : $x + \sqrt{x^2+1} > 0$.

(b) Déterminer la dérivée de la fonction h qui, à tout réel x associe $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

(c) En déduire l'expression explicite de $f(x)$.

6. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de 0.

(a) Etablir que, pour tout réel x strictement positif, on a : $x - f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}\left(1+\sqrt{t^2+1}\right)} dt$

(b) En déduire :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0 \leqslant x - f(x) \leqslant \frac{7}{6}x^3$$

(c) Conclure que $f(x) \underset{0^+}{\sim} x$.

(d) Montrer que l'on a aussi : $f(x) \underset{0^-}{\sim} x$.

Exercice 3

Dans cet exercice, θ désigne un réel strictement positif et n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Pour tout k de $\mathbb{N}$, on pose : $u_k = \dfrac{1}{1+\theta}\left(\dfrac{\theta}{1+\theta}\right)^k$.

1. Montrer que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définit bien une loi de probabilité.
On considère maintenant une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathrm{P}(X = k) = u_k$$

2. (a) On pose $Y = X + 1$. Reconnaître la loi de Y, puis en déduire l'espérance et la variance de X.

(b) Compléter la fonction Python suivante pour qu'elle simule la loi d'une variable aléatoire X.

```python
    def fonction_X(theta):
        Y=0
        while ...
                Y=Y+1
        X=
        return(X)
```

3. Dasns cette question, on souhaite estimer le paramètre θ par la méthode du maximum de vraisemblance. Pour ce faire, on considère un échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ composé de variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même loi que X et on intoduit la fonction L, de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}_+^*, \quad L(\theta) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{P}(X_k = x_k)$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ désignent des entiers naturels éléments de $X(\Omega)$.
L'objectif est de choisir la valeur de θ qui rend $L(\theta)$ maximale.

(a) Ecrire $\ln(L(\theta))$ en fonction de θ et de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$.

(b) On considère la fonction φ, définie par :

$$\forall \theta \in]0; +\infty[, \varphi(\theta) = S_n \ln\theta - (S_n + n)\ln(1+\theta)$$

Montrer que la fonction φ admet un maximum, atteint en un seul réel que l'on notera $\hat{\theta_n}$ et que l'on exprimera en fonction de S_n. Que représente $\hat{\theta_n}$ pour la fonction L?

On pose dorénavant : $T_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$. La variable T_n est appelée estimateur du maximum de vraisemblance pour θ.

(c) Vérifier que T_n est un estimateur sans biais de θ. (*Montrer que* $E(T_n) = \theta$).

(d) Calculer le risque quadratique $r_{T_n}(\theta)$ de T_n et vérifier que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} r_{T_n}(\theta) = 0$.
(*Le risque quadratique est défini par* $r_{T_n}(\theta) = E((T_n) - \theta)^2)$.).

Problème

1. Soit x un réel quelconque.
   (a) Justifier que la fonction $t \mapsto \max(t, x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

   On considère maintenant l'intégrale $y = \int_0^1 \max(x,t)dt$.

   (b) Montrer que $y = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ \dfrac{x^2+1}{2} & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 1 \\ x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

   Dans la suite du problème, on considère une variable aléatoire X définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

   On admet que l'on définit une variable aléatoire Y, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, en posant $Y = \int_0^1 \max(X,t)dt$, ce qui signifie que, pour tout ω de Ω, on a :

$$Y(\omega) = \int_0^1 \max(X(\omega), t)dt$$

   On note F_Y la fonction de répartition de Y.
   On se propose dans la suite de déterminer la loi de Y connaissant celle de X.
2. Vérifier que si X suit une loi géométrique alors on a : $Y = X$.
3. On suppose, dans cette question, que $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et que l'on a :

$$\mathrm{P}(X = -1) = \mathrm{P}(X = 1) = \frac{1}{4}$$

   (a) Déterminer la valeur de $\mathrm{P}(X = 0)$.
   (b) Vérifier que $Y(\Omega) = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$ puis donner la loi de Y.
   (c) Compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire Y.

```python
def fonction_y():
    if ...:
            y=...
    else:
            y=...

    return(y)
```

4. On suppose, dans cette question, que X suit la loi uniforme sur $[0;1[$, avec $X(\Omega) = [0;1[$.
   (a) Vérifier, en utilisant la première question, que l'on a : $Y = \dfrac{X^2+1}{2}$.
   (b) En déduire que $Y(\Omega) = \left[\frac{1}{2}, 1\right[$.
   (c) Montrer alorsque, pour tout x de $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$, on a : $F_Y(x) = \sqrt{2x-1}$.
   (d) Expliquer pourquoi Y est une variable à densité.
   (e) Donner la valeur de $E(Y)$.
   (f) Compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire Y.

```python
def fonction_y():
    u=...
            y=...
    return(y)
```

5. On suppose, dans cette question, que X suit la loi normale centrée réduite. On rappelle que $X(\Omega) = \mathbb{R}$ et on note Φ la fonction de répartition de X.

   (a) Vérifier que $Y(\Omega) = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

   (b) Donner la valeur de $P\left(Y = \frac{1}{2}\right)$.

   (c) Utiliser la formule des probabilités totales associée au système complet d'évenements $([X \leqslant 0], [0 < X \leqslant 1], [X > 1])$ pour établir l'égalité suivante :

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < \frac{1}{2} \\ \Phi(\sqrt{2x-1}) & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \\ \Phi(x) & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

   (d) La variable aléatoire Y est-elle à densité? Est-elle discrète?