Devoir Surveillé n° 1

Le 07/10/23

Durée : 4 heures

Exercice 1

Partie 1 : Études de deux fonctions

1. Soit N la fonction définie sur l'intervalle $[0,1[$, à valeurs réelles, telle que :

$$N(x) = x^2 - 2x - 2(1-x)\ln(1-x).$$

- (a) Montrer que la fonction N est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$.
 - (b) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, on a : $\ln(1-x) \leq -x$.
 - (c) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, on a : $N'(x) \leq 0$.
 - (d) En déduire le signe de N sur l'intervalle $[0,1[$.
2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,1[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-2(x + \ln(1-x))}{x^2}, & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- (a) Déterminer un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \rightarrow 1$.
En déduire la limite de $f(x)$ lorsque $x \rightarrow 1$.
- (b) Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\ln(1-x)$.
- (c) En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
- (d) En déduire que la fonction f est continue sur $[0,1[$.
- (e) Montrer que f est dérivable sur $]0,1[$ et que pour tout $x \in]0,1[$, on a :

$$f'(x) = -2 \frac{N(x)}{x^3(1-x)}.$$

On admet qu'au voisinage de 0, on a : $\ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2} \sim -\frac{x^3}{3}$.

- (f) Montrer alors que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 2/3$.
- (g) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0,1[$, limites comprises.
- (h) Tracer soigneusement l'allure de la courbe représentative de la fonction f . On donnera l'équation de la tangente en 0 et on la tracera.
- (i) À l'aide de la formule de Taylor-Young en 0 au rang 3 donnée ci-dessous, que l'on admet être licite pour une fonction φ de classe $\mathcal{C}^3$ au voisinage de 0, démontrer l'équivalence admise ci-dessus.

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)x + \frac{\varphi''(0)}{2!}x^2 + \frac{\varphi'''(0)}{3!}x^3 + o(x^3), \quad x \rightarrow 0.$$

Partie 2 : Résolutions d'équations

- 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution, notée u_n sur $[0,1[$. Donner la valeur de u_1 .
- 5. L'équation $f(x) = x$ admet-elle une solution sur $[0,1[$?

Exercice n°2

Dans tout l'exercice, $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. On notera respectivement I_3 et 0_3 la matrice identité et la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Soit F l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, où a et b sont des réels quelconques.

Soit G l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = M$.

Partie I

1. F est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? Si oui, déterminer une base de F et préciser la dimension de F .
2. G est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? Si oui, déterminer une base de F et préciser la dimension de G .

3. Soit $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

- (a) Démontrer que $A \in F \cap G$.
- (b) En déduire un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(A) = 0$. Donner ses racines.
- (c) On note $E_0 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0\}$ et $E_1 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\}$. Montrer que ce sont deux espaces vectoriels et donner une base de chacun d'entre eux.
- (d) La matrice A est-elle inversible?
- (e) (*) La matrice A est-elle diagonalisable?

Partie II

On considère dans cette partie une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ de F avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

4. (a) Démontrer que :

$$M \in G \iff \begin{cases} a^2 + 2b^2 = a \\ b(b + 2a - 1) = 0 \end{cases}$$

- (b) Montrer alors que : $F \cap G = \{I_3, 0_3, A, I_3 - A\}$.
5. On note $B = I_3 - A$. Démontrer que (A, B) est une base de F .
6. (a) On note $\alpha = a - b$ et $\beta = a + 2b$. Vérifier que : $M = \alpha A + \beta B$.
- (b) Calculer AB et BA .
 - (c) Montrer que pour tout entier naturel n : $M^n = \alpha^n A + \beta^n B$.
7. (a) Montrer que M est inversible si et seulement si $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$.
- (b) Si α et β sont deux réels non nuls, montrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$M^{-n} = \alpha^{-n} A + \beta^{-n} B$$

Partie III

Soient $T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On considère la suite (X_n) de matrices colonnes définie par $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = TX_n + Y$$

8. Calculer la matrice $I_3 - T$ et exprimer cette matrice en fonction de A et B .
9. À l'aide de la question 7, calculer la matrice $(I_3 - T)^{-1}$.
10. Démontrer qu'il existe une unique matrice colonne L , que l'on déterminera, telle que : $L = TL + Y$.
11. Démontrer que pour tout entier naturel n , on a : $X_{n+1} - L = T(X_n - L)$, puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n - L = T^n(X_0 - L)$$

12. Pour tout entier naturel n , exprimer X_n en fonction de A, B, L, X_0 et n .

Exercice 3

On dispose de trois urnes U_1, U_2 et U_3 , et d'une infinité de jetons numérotés $1, 2, 3, 4, \dots$

On répartit un par un les jetons dans les urnes : pour chaque jeton, on choisit au hasard et avec équiprobabilité une des trois urnes dans laquelle on place le jeton. Le placement de chaque jeton est indépendant de tous les autres jetons, et la capacité des urnes en nombre de jetons n'est pas limitée.

Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n (respectivement Y_n, Z_n) le nombre de jetons présents dans l'urne 1 (respectivement l'urne 2, l'urne 3) après avoir réparti les n premiers jetons.

Partie I

Pour tout entier naturel n non nul, on note V_n l'événement : «Après la répartition des n premiers jetons, au moins une urne reste vide ».

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
 - (a) Justifier que X_n, Y_n et Z_n suivent la même loi binomiale dont on précisera les paramètres.
 - (b) Expliciter $P(X_n = 0)$ et $P(X_n = n)$.
 - (c) Justifier que $(Y_n = 0) \cap (Z_n = 0) = (X_n = n)$.
 - (d) Exprimer l'événement V_n à l'aide des événements $(X_n = 0), (Y_n = 0)$ et $(Z_n = 0)$.
 - (e) En déduire que : $P(V_n) = 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n - 3 \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

2. On note V l'événement : «Au moins l'une des trois urnes reste toujours vide ».

Exprimer l'événement V à l'aide des événements V_n , puis démontrer que $P(V) = 0$.

3. Soit T la variable aléatoire égale au nombre de jetons nécessaires pour que, pour la première fois, chaque urne contienne au moins un jeton.

(a) Compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle simule le placement des jetons jusqu'au moment où chaque urne contient au moins un jeton, et pour qu'elle renvoie la valeur prise par la variable aléatoire T .

```

1 def T():
2     X=0
3     Y=0
4     Z=0
5     n=0
6     liste=[X,Y,Z]
7     while ... :
8         i=rd.randint(1,4)
9         liste[i]= ...
10        n=n+1
11    end
12    t= ...
13    return(t)

```

(b) Écrire un programme Python qui simule 10000 fois la variable aléatoire T et qui renvoie une valeur approchée de son espérance (en supposant que cette espérance existe).

4. Déterminer $T(\Omega)$.
5. Démontrer que : $\forall n \in T(\Omega), \quad P(T = n) = P(V_{n-1}) - P(V_n)$.
6. Démontrer que la variable aléatoire T admet une espérance, et calculer cette espérance.

Partie II

Pour tout entier naturel n non nul, on note W_n la variable aléatoire égale au nombre d'urne(s) encore vide(s) après le placement des n premiers jetons.

7. (a) Donner la loi du couple (X_2, W_2) .
- (b) En déduire la loi de W_2 , et calculer son espérance.
- (c) Calculer $E(X_2W_2)$.
- (d) Les variables aléatoires X_2 et W_2 sont-elles indépendantes ?

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3 .

8. Déterminer $W_n(\Omega)$.
9. Pour $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, on note $W_{n,i}$ la variable aléatoire égale à 1 si l'urne i est encore vide après le placement des n premiers jetons, et qui vaut 0 sinon.
 - (a) Montrer que : $\forall i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket, E(W_{n,i}) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
 - (b) Exprimer la variable aléatoire W_n en fonction des variables aléatoires $W_{n,1}, W_{n,2}$ et $W_{n,3}$.
 - (c) Exprimer alors $E(W_n)$ en fonction de n .
10. Démontrer que : $P((X_n = n) \cap (W_n = 2)) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, quelle est la valeur de $P((X_n = k) \cap (W_n = 2))$?

11. Démontrer que : $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, P((X_n = k) \cap (W_n = 1)) = \frac{2 \binom{n}{k}}{3^n}$.

Que vaut $P((X_n = n) \cap (W_n = 1))$?

12. Démontrer que :

$$E(X_n W_n) = 2nP((X_n = n) \cap (W_n = 2)) + \sum_{k=1}^{n-1} kP((X_n = k) \cap (W_n = 1)).$$

13. Montrer alors que $E(X_n W_n) = n \left(\frac{2}{3}\right)^n$, puis calculer $C(X_n, W_n) = E(X_n W_n) - E(X_n)E(W_n)$.
14. Interpréter le résultat obtenu à la question précédente.